社会保障とマクロ経済学

— Auerbach and Kotlikoff モデル —

山田知明

明治大学
tyamada@meiji.ac.jp

2018 年 12 月 11 日@METI(アップデート版)

目次

ライフサイクルモデル

- 2 期間 (3 期間) モデルを一般化
  - Auerbach and Kotlikoff モデル
- モデルの特徴
  - ライフサイクル：現役世代と引退世代
  - 現実的な人口動態
    - 財政の持続可能性
    - 社会保障制度：年金・医療・介護
  - 動学的一般均衡
    1. 定常状態 (steady state)
    2. 移行過程 (transition path)
    3. マクロショック (aggregate shocks)

家計の意思決定

- 世代内には同質的な家計
- マクロ経済に不確実性は存在しない
- まずは定常状態を計算：時間 t は不要
  - 唯一のリスクは生存確率：a_j
- 家計の目的関数

$$\max \sum_{j=1}^{J} S_j \beta^{j-1} \frac{c_j^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

  - $j \in \{1, \dots, jr, \dots, J\}$：年齢、$jr$：引退年齢
  - $S_j \equiv \prod_{i=1}^{j-1} s_i$：$j$ 歳までの生存確率

予算制約

- 勤労世帯の予算制約

$$c_j + a_{j+1} = (1+r)(a_j + b) + (1-\tau)w\eta_j$$

- 引退世帯の予算制約

$$c_j + a_{j+1} = (1+r)(a_j + b) + ss$$

  - c_j：j 歳における消費、a_j：j 歳における資産
  - b：意図しない遺産 (accidental bequest)、r：利子率、w：賃金
  - η_j：年齢毎の生産性、τ：保険料率
- 借り入れ制約 (必ずしも必要ではない)

$$a_{j+1} \geq 0$$

家計の意思決定 (続き)

現役世代のベルマン方程式： $j = 1, \ldots, jr$

$$V(j, a_j) = \max \left\{ \frac{c_j^{1-\gamma}}{1-\gamma} + s_j \beta V(j+1, a_{j+1}) \right\},$$

subject to

$$c_j + a_{j+1} = (1+r)(a_j + b) + (1-\tau) w \eta_j,$$

$$a_{j+1} \geq 0.$$

家計の意思決定 (続き)

引退世代のベルマン方程式： $j = jr + 1, \ldots, J$

$$V(j, a_j) = \max \left\{ \frac{c_j^{1-\gamma}}{1-\gamma} + s_j \beta V(j+1, a_{j+1}) \right\},$$

$$\text{subject to}$$

$$c_j + a_{j+1} = (1+r)(a_j + b) + ss,$$

$$a_{j+1} \geq 0.$$

一階条件

- オイラー方程式

$$u'(c_j) \geq s_j\beta(1+r)u'(c_{j+1})$$

- なぜ不等式?
  - 流動性制約が存在：$a_{t+1} \geq 0$
- 我々が知りたいのは政策関数 (policy function)

$$a' = g_j(a)$$

人口動態

- 家計の一部は $1 - s_j$ の確率で死亡する
  - 大数法則より死亡確率 = 死亡する人の割合
- コーホートサイズ (割合) の推移式

$$\mu_{t+1} = \frac{1}{1+g_n} s_j \mu_j$$

  - μ_j： j 歳人口の割合、g_n：人口成長率
  - 総人口が常に 1 になるように基準化

$$\sum_{j=1}^{J} \mu_j = 1$$

  - 定常状態を計算する際の仮定

生産サイド

- 総資本

$$K = \sum_{j=1}^{J} \mu_j a_j$$

- 総労働 (外生)

$$L = \sum_{j=1}^{jr} \mu_j \eta_j$$

- 代表的企業の生産関数

$$Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

政府の予算制約

- 社会保障制度 (公的年金)

$$\sum_{j=1}^{jr} \mu_j \tau w \eta_j = \sum_{j=jr+1}^{J} \mu_j ss$$
$$= \sum_{j=jr+1}^{J} \mu_j \varphi w \bar{L}$$

  - $ss \equiv \varphi w \bar{L}$：公的年金給付額
    - φ：所得代替率
  - $\bar{L} = \sum_{j=1}^{jr} \eta / jr$：平均労働生産性
- 意図しない遺産

$$b = \sum_{j=1}^{J} \mu_j (1+r)(1-s_j) a_j$$

再帰的競争均衡の定義

再帰的競争均衡 (Recursive competitive equilibrium) は下記を満たす価値観数 (value function) V、政策関数 g、利子率 r、賃金 w、税率 τ である。

1. 家計の最適性 (optimality of household)
2. 企業の最適性 (optimality of firm)

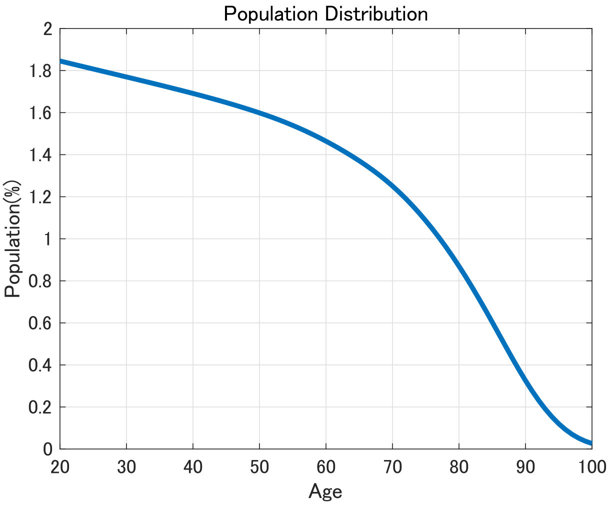
$$r = \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}, \ w = (1-\alpha) A K^{\alpha} L^{-\alpha}$$

3. 市場均衡 (market clearing)
   - 財市場、資本市場、労働市場
4. 政府の予算制約

カリブレーション

- $jr = 46$、$J = 81$：
  1. 20 歳から経済活動を開始
  2. 65 歳で定年退職
  3. 最大で 100 歳まで生存
- $\beta = 0.98$：K/Y をターゲット
- $\gamma = 2$：様々なマクロ・ミクロ実証研究を参照
- 生産サイド
  - $\alpha = 0.377$、$\delta = 0.08$：Imrohoroglu and Sudo (2010)
- 年齢毎の生産性：$\{\eta_j\}$
  - 賃金構造基本統計調査など
  - Braun, Ikeda and Joines (2005)
- 人口分布・生存確率 $\{\mu_j\}$、$\{s_j\}$
  - 国立社会保障・人口問題研究所

定常人口分布


Population Distribution
Population(%)
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Age

年齢毎の労働生産性


Age-Efficiency Profile
Efficiency: η
Age
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65

定常状態の計算

1. 事前の準備
   - 人口分布を計算
   - 労働生産性プロファイルを読み込む
   - 均衡保険料 τ^* を計算
   - 総労働 L を計算
2. 初期値を設定
   - $K_{(0)}$ を一つ当て推量 (initial guess)$\Rightarrow$ $\left(r_{(0)}, w_{(0)}\right)$ を計算
   - 意図しない遺産 $b_{(0)}$ を同様に当て推量
3. 要素価格と遺産を所与として家計の最適化問題を解く
   - $a' = \tilde{g}_j\left(a; r_{(0)}, w_{(0)}, b_{(0)}\right)$
   - Value function iteration、射影法 (Projection method)、EGM など

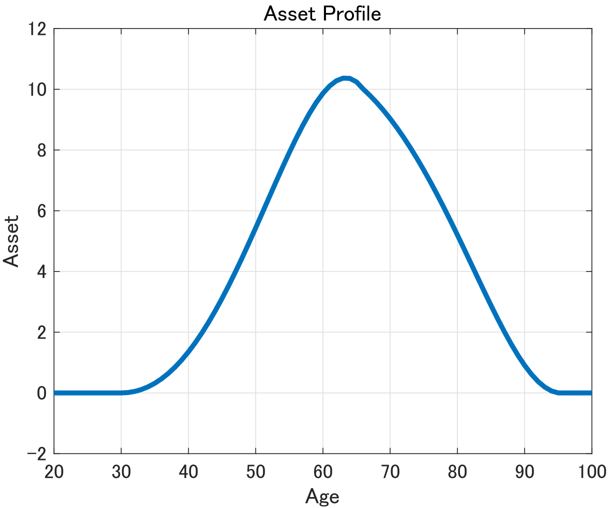
定常状態の計算 (続き)

4. 上のステップで計算して得た政策関数を使って $\{a_j; r_{(0)}, w_{(0)}, b_{(0)}\}_{j=1}^{J}$ を計算
   - $a_1 = 0$：生まれた時点では貯蓄はゼロ
   - $a_{j+1} = \tilde{g}_j(a_j; r_{(0)}, w_{(0)}, b_{(0)})$ を前向きに解いていく
5. 総資本 $K_{(1)} = \sum_{j=1}^{J} \mu_j a_j$ を計算
6. 当て推量した $K_{(0)}$ と $K_{(1)}$ が "十分に" 近いかを確認：$||K_{(1)} - K_{(0)}|| < \varepsilon$
   - Yes：定常状態!
   - No：K をアップデートしてステップ 3-6 を繰り返す

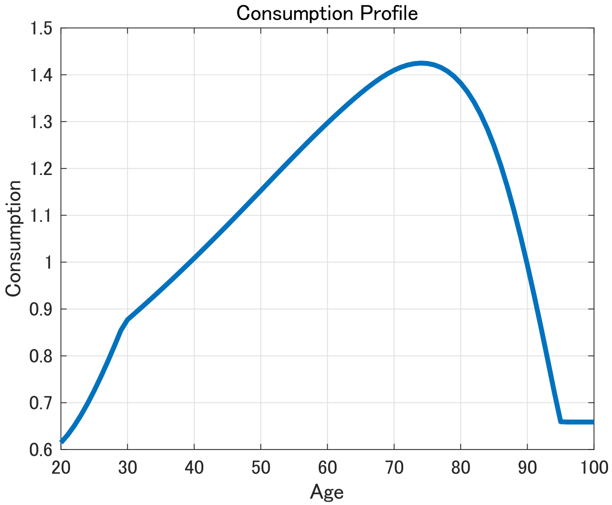
Tips

- 解き方は上記の一通りではない
  - 一階条件を並べて解く
  - Shooting algorithm
  - 詳しくは小黒・島澤 (2011) などを参照
  - 借り入れ制約を仮定しなければ closed-form solution もある
    - Attanasio, Kitao and Violante (2007)
  - モデルを拡張したり追加的な制約条件を課す場合、上記の方法が使えない場合がある

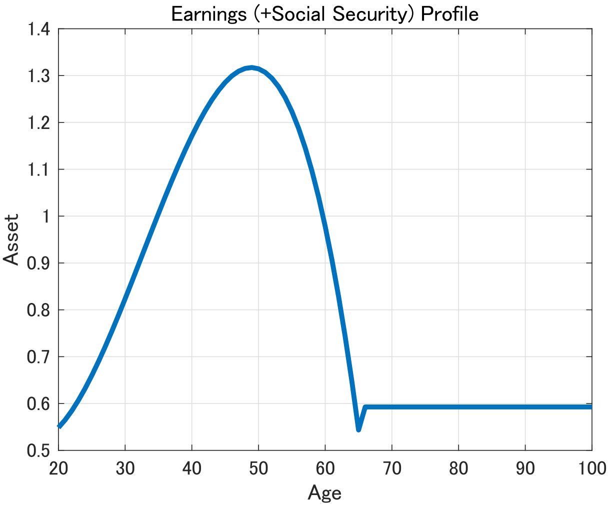
資産プロファイル



消費プロファイル


Consumption Profile
Consumption
Age
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
20
30
40
50
60
70
80
90
100

所得プロファイル


Earnings (+Social Security) Profile
Asset
Age
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
20
30
40
50
60
70
80
90
100

移行過程

- なぜ移行過程を計算?
  - 日本経済は定常状態から程遠い
    - 人口動態：団塊の世代、団塊 Jr. など
  - 定常状態と移行過程では政策的含意が異なる
    - 異なる世代は異なる時代を過ごす

移行過程 (続き)

- 基本的な考え方
  - 定常状態の計算方法を長期間に伸ばす
    $\Rightarrow$ “非常に長い” バックワードインダクション
  - T (terminal period)$\rightarrow$ $T-1,\cdots,\rightarrow 1$ (initial period)
  - 計算時間がかかる!
- 定常状態間の計算を行う
  - 最終定常状態なしに移行過程の計算は不可能 (where to go?)
  - 初期状態は必ずしも定常状態である必要はない
  - ただし、初期分布 ($\{a_j\}$) は必要

モデル

- 家計の目的関数

$$V_t(j,a,e) = \max_{c,a'} \left\{ u(c) + s_{j,t} \beta V_{t+1}(j+1, a', e') \right\}$$

  - t：カレンダー年、j：年齢
  - a：資産、c：消費、$s_{j,t}$：生存確率 (t に依存!)
  - e：厚生年金の報酬比例部分
  - $e' = \frac{(j-1)e + \min(w_t \eta_j, y^{\max})}{j}$ if $j \leq jr$

モデル (続き)

- 予算制約

$$(1+\tau_t^c)c + a' = (1-\tau^y)w_t\eta_j + ss(e) + R_t(a+b) - m_{j,t} - \xi$$

  - 税引き後粗利子率

$$R_t = 1 + (1-\tau^k)r_t^k(1-\phi_t) + (1-\tau^d)r^d\phi_t$$

  - τ^k：資本税、τ^d：国債への税、τ^y：労働所得、τ_t^c：消費税
  - ϕ_t：貯蓄を資本と国債に分配するためのパラメータ
  - r^k：資本からのリターン、r^d：国債の利回り
  - $ss(e) = \bar{ss} + \rho e$：公的年金
  - $m_{j,t}$：医療・介護費、ξ：人頭税

生産サイド

- 生産関数

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

  - $\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right)^{1/(1-\alpha)} = 1 + g_t$: TFP 成長率
  - 数値計算では全ての変数を $Z_t^{1/(1-\alpha)}$ で除してトレンド除去 (detrend) をする必要あり

生産サイド (続き)

- 総資本

$$A_t = (1-\phi_t)A_t + \phi_t A_t = K_t + D_t$$

- 総労働

$$L_t = \sum_{j=1}^{jr} \mu_{j,t}\eta_j$$

- 要素価格

$$r_t^k = \alpha Z_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - \delta,$$
$$w_t = (1-\alpha) Z_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}.$$

医療と介護

- 医療・介護

$$m_{j,t} = \lambda_j^h m_{j,t}^h + \lambda^l m_{j,t}^l$$

  - $m_{j,t}^h$ ：年齢毎の一人あたり医療費
  - $m_{j,t}^l$ 年齢毎の一人あたり介護費
  - λ_j^h ：医療費の窓口負担率 (年齢依存)
  - λ_j^l ：介護の自己負担率
- 政府負担

$$M_t = \sum_{j=1}^{J} \mu_{j,t} \left[(1 - \lambda^h) m_{j,t}^h + (1 - \lambda^l) m_{j,t}^l \right]$$

政府の予算制約

- 政府の予算制約

$$G_t + (1 + r^d) D_{t-1} + S_t + M_t = T_t^y + T_t^a + T_t^c + D_t + \xi^*$$

  - G_t : (社会保障関連費以外の) 政府支出
  - D_t : 政府債務
  - $S_t = \sum ss(e) \mu_{j,t}$: 年金支出
  - $T_t^y = \tau^y \sum_{j=1}^{jr} y_{j,t} \mu_{j,t}$: 所得税
  - $T_t^a = \tau^k r_t^k K_t + \tau^d r^d D_t$: 資本税
  - $T_t^c = \tau_t^c C_t$: 消費税

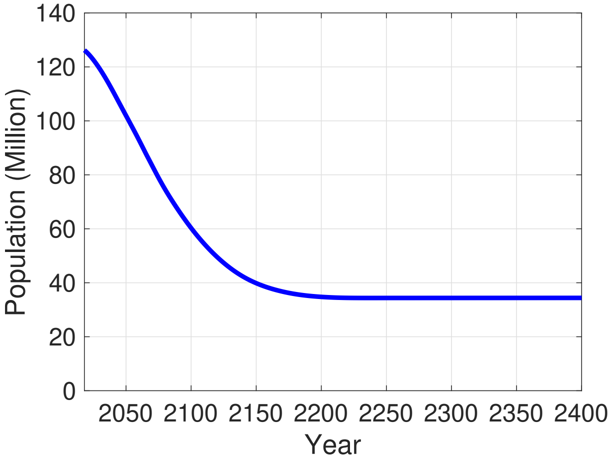
アルゴリズム

1. パラメータを設定
   - 人口動態について社人研の推計を延長
2. 初期定常状態と最終定常状態を計算する: 1980 年 & 2400 年
3. 要素価格の流列 $\{r_t^0, \tilde{w}_t^0\}_{t=2018}^{2400}$ を当て推量
4. 所与の要素価格のもとで、最終定常状態からバックワードに政策関数を計算
   - これまで同様、Projection method でも EGM でも自分が使いやすい方法を使う
5. 計算した政策関数を使って、貯蓄プロファイルを 2018 年から前向きに解いていく
6. 各年の総資本と要素価格を計算
7. 新しい要素価格と当て推量した要素価格の誤差を測る
8. もし “全ての年について” 誤差が小さければ均衡移行経路の計算終了!もし誤差が大きければ、要素価格をアップデートしてステップ 4–7 を繰り返す

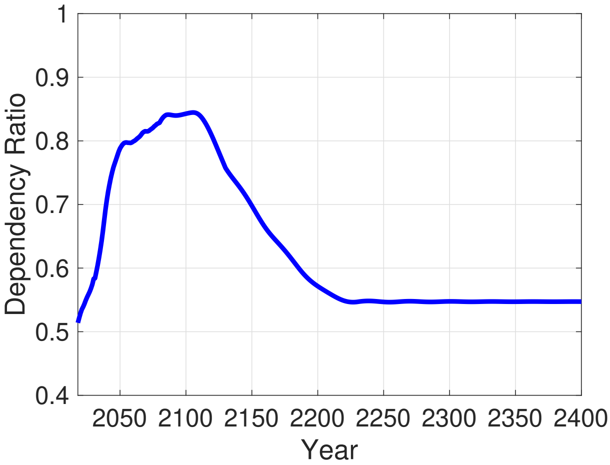
カリブレーション

- 人口
  - 国立社会保障・人口問題研究所「日本の将来推計人口」
  - 2015 年–2065 年
  - 最終定常状態 (2400 年) まで延長
- 医療費・介護費
  - İmrohoroğlu, Kitao and Yamada (2018)

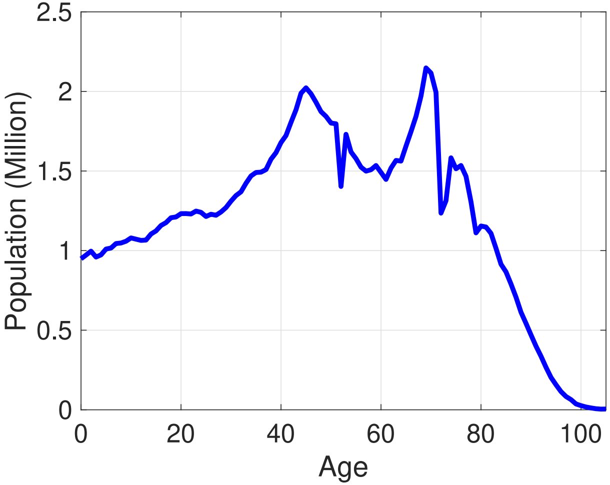
人口推移


140
120
100
80
60
40
20
0
Population (Million)
2050 2100 2150 2200 2250 2300 2350 2400
Year

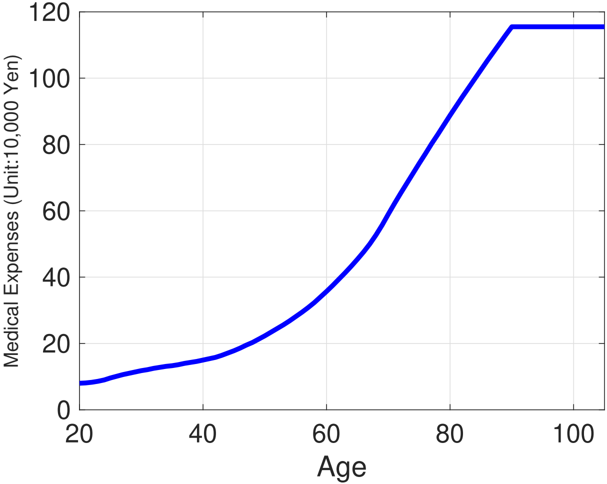
従属人口比率


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
Dependency Ratio
2050
2100
2150
2200
2250
2300
2350
2400
Year

人口分布：2018 年

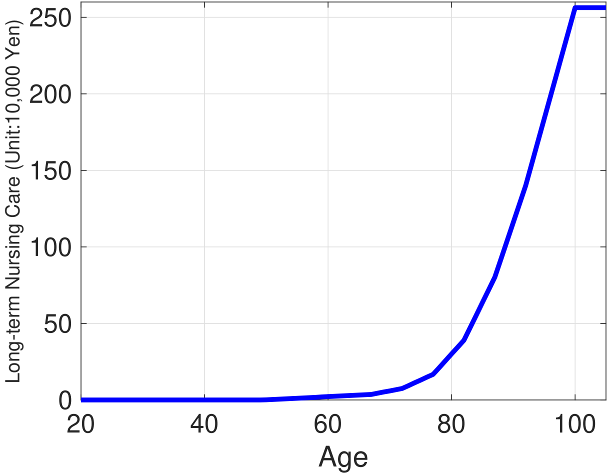


年齢毎の医療費



Medical Expenses (Unit:10,000 Yen)
120
100
80
60
40
20
0
20
40
60
80
100
Age

年齢毎の介護費

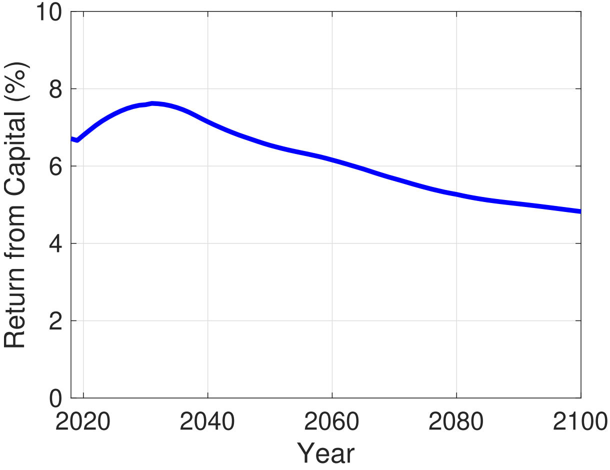

Long-term Nursing Care (Unit:10,000 Yen)
250
200
150
100
50
0
20
40
60
80
100
Age

カリブレーション (続き)

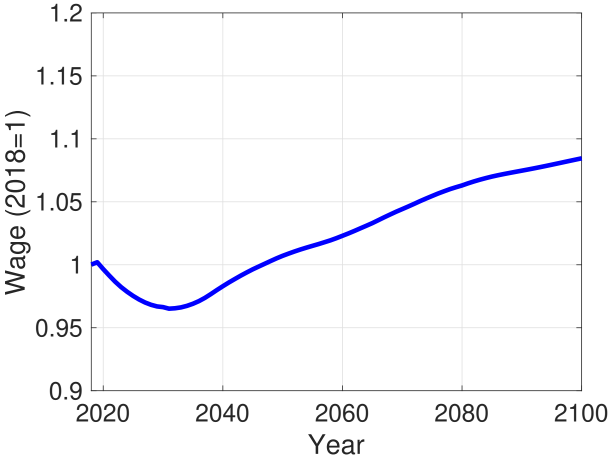
- β：モデルにおける $K/Y = 2.5$ がターゲット
- $\bar{ss}$：国民年金 $= 60,000 \times 12\text{months}$
- ρ：報酬比例部分 (所得代替率に合わせて調整)
- $r^d = 0.01$：国債の利回り
- $\tau^l = 0.1$：限界税率 $\Leftarrow$Gunji and Miyazaki (2011)
- $\tau^s = 0.183$：公的年金の保険料率
- $\tau^k = 0.398$：資本所得税 $\Leftarrow$Imrohoroglu and Sudo (2010)
- $D/Y = 1.5$：初期定常状態のターゲット
- $\phi = 0.375$：$\frac{D/Y}{K/Y}$ より算出

注意："暫定"結果

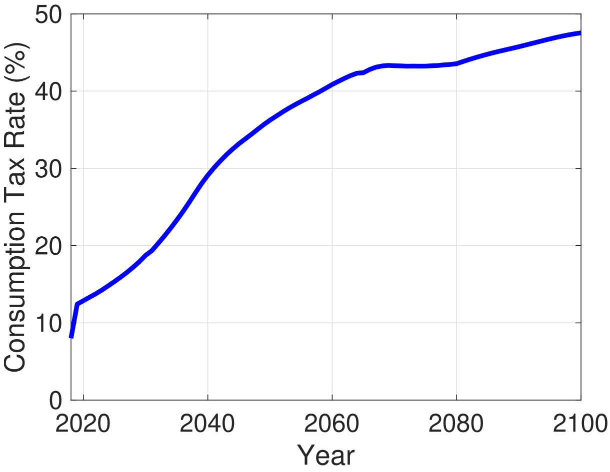
利子率



賃金

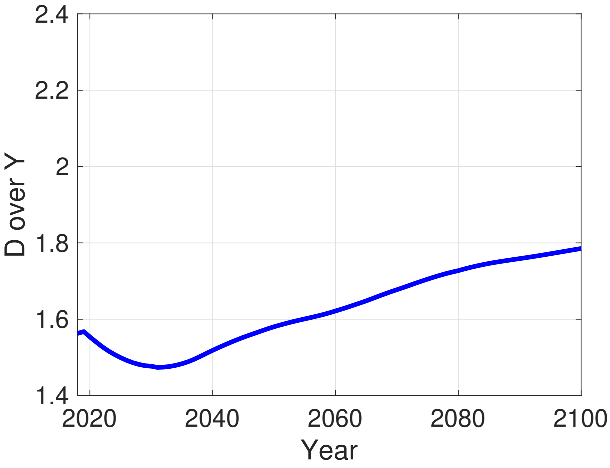


均衡消費税率



Consumption Tax Rate (%)
0
10
20
30
40
50
2020
2040
2060
2080
2100
Year

国債：対 GDP 比



(不完全な) 先行研究リスト

- Auerbach, A.J., and L.J. Kotlikoff (1987), *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge University Press.
- Braun, R.A. (2015), "The Implications of a Greying Japan for Government Policy," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 57, 1-23.
- De Nardi, M., S. Imrohoroglu, and T. Sargent (1999), "Projected U.S. Demographics and Social Security," *Review of Economic Dynamics*, 2, 575-615.
- Kitao, S. (2015), "Pension Reform and Individual Retirement Accounts in Japan," *Journal of the Japanese and International Economies*, 38, 111-126.
- Kitao, S. (2015), "Fiscal Cost of Demographic Transition in Japan," *Journal of Econoimc Dynamics and Control*, 54, 37-58.
- Kotlikoff, L.J., K. Smetters, and J. Walliser (2007), "Mitigating America's Demographic Dilemma by Pre-funding Social Security," *Journal of Monetary Economics*, 54, 247-266.

参考文献

- 小黒一正・島澤諭 (2011)『Matlab によるマクロ経済モデル入門』日本評論社.
- Attanasio, O., S. Kitao and G.L. Violante (2008), "Global Demographic Trends and Social Security Reform," *Journal of Monetary Economics*, 54, 144-198.
- Braun, R.A., D. Ikeda and D. Joines (2005), "Saving and Interest Rate in Japan: Why They Have Fallen and Why They Will Remain Low," *CIRJE-F-328*.
- Gunji, H. and K. Miyazaki (2011), "Estimates of Average Marginal Tax Rates on Factor Incomes in Japan," *Journal of the Japanese and International Economies*, 25, 81-106.
- Imrohoroglu, S., and N. Sudo (2010), "Productivity and Fiscal Policy in Japan: Short Term Forecasts from the Standard Growth Model," *IMES Discussion Paper Series*, 10-E-23.