

確率的動学一般均衡理論と数値計算

[VERY PRELIMINARY, PLEASE DO NOT QUOTE]

山田 知明*

立正大学 経済学部

2008年8月30日

概要

この講義ノートは、2008年8月28日、29日に一橋大学で行われた数値計算に関する特別講義をまとめたものである。確率的動学一般均衡モデル (Dynamic Stochastic General Equilibrium Model; DSGE) を解くための手法を解説している。更に、マクロショックの導入など、新しい手法についても概観することによって数値計算を用いたマクロ経済学研究のフロンティアを展望する。

Keywords: 数値解析、動的計画法

JEL Classification: C63, C68, E37

目次

第I部	数値計算の基礎	3
1	数値計算への誘い	3
1.1	はじめに	3
1.2	実際に数値計算を始めるにあたって：テキスト選択	5
1.3	ソフトウェア選択	5

* 立正大学経済学部: 141-8602 東京都品川区大崎 4-2-16. E-mail: tyamada@ris.ac.jp. Phone: +81-3-5487-3239. 見ての通り未完成稿なので、引用しないでください。本稿で使用したプログラムの一部は、下記のHPからダウンロード可能です。Google 検索を避けるために、Zip 化してパスワードもかけてあります。Zip ファイルを解凍するためのパスワードは全て小文字で“hit-u_lecture”です。http://homepage2.nifty.com/~tyamada/index.html

目次	目次
1.4	数値計算誤差について 8
2	最適成長モデルと動的最適化問題 10
2.1	動的計画法 10
2.2	オイラー方程式を使ったアプローチ 16
2.3	数値計算の精度について 21
2.4	労働供給を内生化 21
3	Ramsey から Bewley へ 23
3.1	固有リスクモデル (Income Fluctuation Problem) 23
3.2	均衡価格を見つける 28
3.3	均衡の存在について 28
3.4	Bewley モデルの数値計算 32
3.5	分布関数の計算 33
3.6	フロンティア 34
第 II 部	数値計算の応用 35
4	集計リスクが存在する経済 35
4.1	何が問題なのか? 35
4.2	近似的に解を求める (Krusell&Smith アプローチ) 36
4.3	シミュレーションの精度 40
4.4	State of the Art 40
4.5	ダウンロード可能なコード 41
5	情報の非対称性、モラルハザードとコミットメント制約 42
5.1	私的情報モデル (Phelan&Townsend、Doepke&Townsend) 42
5.2	逆オイラー方程式と資本所得課税 (Farhi&Werning) 42
5.3	コミットメント制約モデル 42
付録 A	数値解析の基礎知識 43
A.1	内挿補間 (Interpolation) 43
A.2	最適化 46

A.3	数値積分	46
付録 B	動的計画法の理論的特徴付け	46
B.1	価値関数と政策関数の微分可能性	49
付録 C	AR(1) 過程を近似する	50
C.1	基本的なアイデア	50
C.2	より具体的には	51
C.3	Tauchen 法と近似誤差	52

第 I 部

数値計算の基礎

1 数値計算への誘い

1.1 はじめに

動学的一般均衡理論は、現在では、分野を問わずに幅広く応用されている。しかし、現実性を高めるためにモデルを一般化していくと、モデルをきちんと設定しても、「解析的解 (Closed-Form Solution) が存在しないためモデルが解けない。」という問題に突き当たる。そのため、近似的にでもモデルの性質を分析したい、あるいは数量的含意 (Quantitative Implication) を知りたいと、数値計算 (Numerical Analysis) を使った分析が発展してきた。

近年、コンピュータの進歩もあり、数値解析 (Quantitative Analysis) を経済学に取り入れる試みは非常に増えている。計量経済学では既に多くのパッケージソフトが存在しているが、ここでは理論モデルを自分で設定して、それをどの様に数値計算するかという一連の作業を全て自分で行う事を前提としている。Bona and Santos[16] は理論と数値計算の関係を次のように書いている*1。

“It is worth emphasizing that the numerical model is not generally meant to directly emulate an economic situation. This model is simply a supporting device (an algorithm of some sort) aimed at the simulation of the true behavior of the mathematical model. One should have a good idea of how well the behavior and stability properties of the

*1 経済理論と数値計算との関係については、Judd[63] や Bona and Santos[16] を参照せよ。

numerical model mimic those of the mathematical model under consideration.”

数値計算を使って理論分析をすることは伝統的な理論分析を行ってきた研究者たちにとっては非常に抵抗があるようである。例えば、多くの数値例を作ったからといって存在証明が出来たことになるわけではない。理論分析の一般性はコンピュータで代替することは出来ない。しかし、理論が現実経済の「近似」であるという観点からすれば、コンピュータを用いて現実経済を「近似」する数値計算も、仮定や定義を積み上げて命題を導き出すという点では同じである。

理論モデルを作るとき、通常は現実の一つか二つのポイントにスポットを浴びせるが、コンピュータを使うことによって、さまざまな経済問題の要因が「どの程度 (Quantitative)」影響しているかについて分析することが出来る。この点は従来の経済理論において弱い部分であった。どの変数が影響して何が影響していないのかについては、経済理論は明白な結論を出すことが出来るが、どの要因がより重要で何がそれほど重要でないかについて理論的に結論を出すことは困難なことが多い。理論分析が“Exact”にモデルの結果を出すのに対して数値計算では結果はあくまで近似 (Approximation) であるが、これがモデルの現実性を必ずしも損なうものではない。純粋に Deductive な理論か Computation かの二択である必要はないし、存在証明のようなものは、もし可能であるならば、数値計算の結果の信用性を高めるものである。むしろ、理論分析では途中で止まっていた各種の問題について数値的な結果を出すことによって、さらに深い洞察を与えることが数値計算の目的の一つである。

無限期間の不完備市場 (Incomplete Market) モデルや家計及び企業の異質性 (Heterogeneity) を持つモデルは解析的に問題を解くことが困難なモデルの典型である。しかし、解析的解が得られなくても数値計算によって近似をすることが出来れば、今まで解けないと思われていた無限期間の不完備市場モデルも解ける可能性が出てくる。近年、代表的個人の仮定を外した動学の一般均衡モデルを用いた研究が増えているのも、数値計算の進歩によって分析が可能になったためである。

実際に経済モデルを数値計算を用いて解こうとするとき、コンピュータ・サイエンスで培われてきた数値解析の分析ツールをどのように利用して実行すれば良いのかという問題に直面する。また、計量経済分析でもよくあることであるが、他人のコードを利用したりすることによって、モデルがブラックボックス化する恐れがある。そこで、この講義では実際に数値計算を使えるようにする事を目的に、しかし細かい事を出来るだけ無視しないように、解説をしていく。

1.2 実際に数値計算を始めるにあたって：テキスト選択

1.2.1 経済学

- Judd[63]: 数値解析を経済学に応用する研究に関する一番基本的なテキスト。
- Miranda and Fackler[95]: Matlab との親和性が高い初心者向けテキスト。読みやすいが、Judd[63] と比べると数学的扱いがやや大雑把。
- Adda and Cooper[1]: 動学的マクロ経済学全般に関するテキストで、理論モデル、推計と数値計算を一つの本の中にコンパクトにまとめている。
- Marimon and Scott[88]: 各トピックについて、その分野のスペシャリスト達書いている。トピックがやや古い箇所もあるので注意が必要。

1.2.2 数値計算のための数学

- Quarteroni, Sacco, and Salei[101]、Atkinson[8]: 数値計算に必要な数学的基礎をまとめた本。必ずしも全て読む必要はないが、手元においておくとも便利なリファレンス。Quarteroni et al.[101] は Matlab コードでの解説もある。
- Press, Flannery, Teukolsky, and Vetterling[100]: ニュートン法等、数値解析に必要なアルゴリズムの実践的な解説とコードを書いているので、文字通り、レシピ感覚で使える。数値計算の専門家から見ると問題もあるらしいので、少し注意する必要があるかもしれない。

1.3 ソフトウェア選択

実際に手を動かして数値計算を行う前に、ソフトウェアの選択を避けて通る事は出来ない。ソフトウェアは、大雑把に分けて、次の3種類の選択肢がある。

1. C 言語や Fortran のように数値計算専用ではない言語
2. Matlab や Gauss のような数値計算 (科学技術演算) 用のソフトウェア
3. Maple や Mathematica のような数式処理ソフト

1.3.1 Fortran[FORTRAN]

数値計算に関しては最終的に一番優れた環境が整う。ただし、Matlab 等に比べると追加的な勉強とコードを書く手間が必要になる。I/O は極めて貧弱なので、グラフなどは別のツールが必要になる。

- Intel Visual Fortran (+IMSL): 統合環境で、数値計算ソフトと同じような感覚で使用できる。また、数値計算パッケージである IMSL がついているので、Matlab からの移行がしやすい。
- NAG Fortran Builder (NAG): IVF と同じような感覚で使える (らしい)。学習用もあるのでおもしろい。
- FTN 95: 商用目的でない限りフリーのコンパイラ
- GCC/G95: GNU プロジェクトによるコンパイラ。コードを書く際にはテキストエディタなどを使用する。
- IMSL/NAG: 有料のパッケージ (サブルーチンの集まり)
- LAPACK/BLAS/MINPACK/HOMPACT: フリーのサブルーチン達。netlib(<http://www.netlib.org/>) などからダウンロード可能。
- チューニング技法入門: <http://acc.riken.jp/HPC/training/text.html>

1.3.2 Matlab/Scilab/Octave

Fortran や C 言語と比べると敷居が低く、入門者用のソフトウェア達。扱いやすいが計算のスピード面では問題があるので、大きなモデルを解きたい場合、プログラミングの手間がかかっても Fortran や C 言語で書いたほうが時間の節約になる。グラフィック面では、Matlab の方が優れている。

Matlab は正規版を購入すると高額だが、Matlab と似たような機能を持つフリーのソフトウェアも開発されている。また、Sun Microsystems が Fortress という並列処理を含んだ新しい言語を開発中 (中山 [127])。

- Scilab: <http://www.scilab.org/>
- Octave: <http://www.gnu.org/software/octave/>
- Fortress: <http://projectfortress.sun.com/Projects/Community>

1.3.3 並列処理

最近の PC に搭載されている CoreDuo(Core2Duo) は、マルチタスクをこなせる。そのため、普通にプログラムを書いて実行しても、CPU 使用率は 50% までしか上がらない。つまりコアの片方しか使用していない。逆に考えると、同じようなプログラムをもう一つ同時進行でこなすことが出来るといえる。このアイデアを使って二つ (以上) の仕事をうまく割り振れば、計算効率は高まる。これを並列処理と呼ぶ。実際、少し工夫をすれば同じモデルを解く時に、並列処理がうまくいけば、早くなったり大規模なモデルを解く事が可能になる。

Open MP フリーで使用できる並列処理用のソフトウェア。IVF ならば始めから対応しており、通常のマルチコア CPU が搭載された PC を使って簡単に実行出来る。市販の参考文献が多少ある。

- 牛島 [121]
- 安田・小林・飯塚・阿部・青柳 [130]

MPI (Message Passing Interface) Open MP よりも汎用性が高いが、パラレル・コンピュータが必要になる。つまり、複数台の PC を用意して、互いに通信をさせて計算する事になる。Open MP との大きな違いは、Open MP はメモリは共有しているが、MPI の場合にはメモリが別々になる点にある。私は使ったことがないので、詳しくは下記の HP を参照。

- Makoto Nakajima's HP: <http://www.compmacro.com/makoto/>

1.3.4 Matlab から Fortran への移行

- 命令の対応関係を覚えれば、一週間もあれば移行できる。
- コンパイル形式とインタープリタ形式では実行速度はだいぶ違う。
- Fortran では、「コンパイル」をして「リンク」をするという作業が必要になる。が、統合環境だとワンクリックで済むので、あまり意識する必要はない。基本部分は共通だが、各社のコンパイラによって許されていない命令もあるので、互換性がなくなる可能性はある。
- チューニングはとても大事*2。例えば、Fortran のループは左の添え字から先に動くので、数学的な行列の演算とは異なる点に注意すると計算スピードがアップする。構造化プログラ

*2 詳しくは、青山「チューニング技法入門」、<http://accr.riken.jp/HPC/training/text.html> を参照。

ミングを覚えて、読みやすいコードを書くように心掛ける。

- グローバル変数とローカル変数の違い、変数のスコープを理解する。変数がクリアされているかを理解していないと、大きなエラーにつながる。Subroutine、Function、Module/Useの使い方を覚えよう (Common は読む必要はあるが、自分ではあまり使わない)。フラグ処理もうまく使いこなせると便利だが、使いすぎると全体構造が理解しづらくなる。
- コンパイルオプションを使いこなせるようになると、計算速度が急激に上昇する (20 分が 5 分になったりする)。デバッグ用とリリースは全然違うので、最終版はリリースにする。ただし、最適化をしすぎると計算結果が変わる場合もある。
- 変数の宣言や単精度と倍精度の違いに注意をはらう。Matlab では勝手にやっているが、きちんと管理したほうがミスが少なくなる。
- ポインターやオブジェクト指向はあまり使わないと思うが、構造体はわりと便利。メモリーの動的割り当ては、大型のプログラムを書くときには必ず必要になる。
- コメントは必ずつける。最適なコメントの書き方を自分で見つけ出す。
- プログラムはアート。前橋 [128] や Goodliffe[131] を参照。

1.3.5 コード置き場

[R]eading a book on computation techniques without actually using the computer is as foolish as reading a cook-book without ever entering the kitchen.(Marimon and Scott[89], p.2 より引用。)

下記の HP では、実際にいろいろな論文で使用されたコードが置いてある。「講義用に作られたコード」と実際に「研究で使用するコード」にはかなりの隔たりがあるので、くじけない程度に眺めてみると良い。

- QM&RBC: <http://dge.repec.org/codes.html>

1.4 数値計算誤差について

1.4.1 計算誤差、合理的期待均衡と ϵ 均衡

数値計算には計算誤差が常についてくる。まったく知らないと思わぬミスにつながるので、あまり面白い話ではないが、確認しておく必要がある。

- 丸め誤差 (Round-Off-Errors): 例えば、 $1/3$ はコンピュータでは近似的にしか表現できない。
- 打ち切り誤差 (Truncation Error): 無限回の演算を実際に行う事は出来ないので、通常は有限回で打ち切るが、その時には当然、誤差が生じている。
- 測定誤差 (Gross Error):

経済理論と数値計算結果の間には少し距離がある。そのため、経済理論との整合性や数値計算結果の解釈をきちんと考える必要がある。例えばオイラー方程式が均衡の必要十分条件であれば、たかだか ϵ でも条件が満たされない以上、均衡ではないとも考えられる。この問題を解決するために、次の三通りの解釈を考える事が出来る。

1. 単純にコンピューテーション上の誤差であり、オイラー方程式は実際に満たされている。
2. 合理性の限界と解釈する。人間の計算可能性からすれば、コンピュータが計算可能な精度は十分に良いため、現実の経済の描写には十分だという立場である。Krusell and Smith[76] は限定合理性の解釈に基づいて、均衡分布の計算をしている。ただし、合理的期待均衡の定義とこのような解釈は整合的でなくなってしまう。
3. Kubler and Schmedders[82] は、近似均衡が必ずしも真の均衡の近傍にない事を明らかにしている。数値計算はパラメータを与えて均衡を計算するわけであるが、パラメータ (経済の Primitives) を少し変えたときに、均衡が大きく変わる可能性がある。パラメータ空間のある経済の ϵ 近傍にある別の経済の均衡、つまり ϵ -均衡として、近似均衡を解釈したい。

1.4.2 “Curse of Dimensionality”

アルゴリズムを考え、それが有限回の手続きで実行可能であると解かったとしても、実際にそれを実行する時にはまだ困難が残っているときがある。コンピュータのメモリーや CPU の現在利用可能な限界が存在しているためである。この現象は、Curse of Dimensionality と呼ばれている。

2 最適成長モデルと動的最適化問題

2.1 動的計画法

この章では動的最適化問題 (Dynamic Optimization Problem) を数値的に「解く」ときに必要になるいくつかのアルゴリズムを解説する。一般的にどれかの方法が「最適な方法」になるというわけではない。そのため、「いくつかの方法を知っておき、自分が解きたい問題に合わせて解法を考え、試しながら使っていく」必要がある。本章では、一番有名で応用しやすい動的計画法に基づいたアルゴリズムとオイラー方程式を用いた方法の2種類を紹介する。具体的なモデルを提示して、実際にアルゴリズムとコードを提供しながら、解説を加えていく。ベースにするのは、一部門最適成長モデル (One-Sector Optimal Growth Model; OSGM) である。

最適成長モデルの解法に関しては、Taylor and Uhlig[119] が Journal of Business and Economic Statistics で解法の比較特集号を編集して以降、様々な論文が書かれている。下記は、良質のサーベイを含め、各手法について読みやすい論文のリストである。

- 線形 (二次) 近似 : Blanchard and Kahn[15]、Juillard[68]、Burnside[18]、Hansen and Sargent[48]、Sims[113][112]、Schmitt-Grohé and Uribe[111]
- 摂動法 (Perturbation Method) : Gasper and Judd[44]、Judd and Guu[64]
- 動的計画法 : Benitez-Silva, Hall, Hitsch, Pauletto, and Rust[9]、Rust[104]、Santos[107]、Santos and Vigo-Aguiar[109]、Aruoba, Fernandez-Villaverde, and Rubio-Ramirez[7]
- 解析的特徴付け : Benveniste and Scheinkman[10]、Santos[106]
- 射影法 (Projection Method): Judd[61]、Judd, Kubler, and Schmedders[66]
- 構造推計 (Structural Estimation): Fernández-Villaverde and Rubio-Ramírez[40][41][42]

2.1.1 基本になるモデル

モデルを設定しよう。これから数値計算による近似解の導出を考えていくが、近似的に解いたはずの解が本当に真の解を近似しているかは、必ずしも自明の問題ではない。計算結果が本当に真の解を近似出来ているかを簡単にチェックする方法は、真の解が既知のモデルを使うことである。そこで、不確実性のない一部門最適成長モデルを考えることにする。

基本モデルは、

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \\ & \text{subject to} \\ & c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta)k_t, \quad k_0 \text{ given}, \quad 0 < \beta < 1 \end{aligned}$$

とする。これをベルマン方程式 (Bellman's Equation) の形で書き換えると、

$$\begin{aligned} v(k) &= \max\{u(c) + \beta v(k')\}, \\ & \text{subject to} \\ c + k' &= f(k) + (1 - \delta)k, \end{aligned} \tag{1}$$

となる*³。ただし、 $v(k)$ は価値関数 (Value Function) で、現在の資本ストックである k は状態変数 (State Variable) と呼ばれる。次期の状態を決める k' (あるいは c) を操作変数 (Control Variable) と呼ぶ。再帰的な形 (Recursive Form) になっているため、経済主体は現在の k だけ与えられていれば、過去や未来に関わらず、意志決定が行える。言い換えると、意志決定及び経済の状態を状態変数だけに集約する事が出来る。一階条件は、

$$\begin{aligned} u'(f(k) + (1 - \delta)k - g(k)) &= \beta v'(g(k)), \\ v'(k) &= (1 - \delta + f'(k))u'(f(k) + (1 - \delta)k - g(k)), \end{aligned}$$

となる。ただし、 $g(k)$ は政策関数 (Policy Function) と呼ばれる意思決定関数 (Decision Rule) である。

解析解 $u(c) = \log c$ 、 $f(k) = k^\alpha$ 、 $\delta = 1$ と特定化した場合、次のような解析的解が存在していることが知られている*⁴。

$$\begin{aligned} v(k_0) &= A + B \log k_0, \\ A &= (1 - \beta)^{-1} \left[\ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \beta\alpha \right], \quad B = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \\ k_{t+1} &= \beta\alpha k_t^\alpha. \end{aligned}$$

また、有限 T 期間モデルの場合、

$$k_{t+1} = \alpha\beta \frac{1 - (\alpha\beta)^{T-t}}{1 - (\alpha\beta)^{T-t+1}} k_t^\alpha, \quad t = 0, 1, \dots, T.$$

となる。このモデルをベースにして、数値計算手法を考えていく。

*³ 詳細は、例えば、Adda and Cooper[1] の第 2 章を参照せよ。

*⁴ Stokey et al.[115] の p.12 を参照せよ。

- 何が知りたいのか?⇒ 通常、価値関数そのものに関心があるわけではなく、知りたいのは政策関数の場合が多い。
- 経済主体の意思決定は状態変数 (このモデルでは k) にのみ依存し、過去の意思決定の流列に影響されない (最適性原理)。

カリブレーション?? モデルを解く際には、当然、関数形及びパラメーターを与える必要がある*5。モデルにパラメーターを与えて現実の経済に近づけていく一連の作業を「カリブレーション」と呼ぶ。ただし、どこからどこまでの範囲をカリブレーションと呼ぶかについては、人によって若干の違いが見られるようである*6。ここでは単純にパラメーターを特定化する事にしておく。使用したパラメーターは次の通りである。

- $\alpha \in \{0.25, 0.3\}$
- $\beta \in \{0.9, 0.99\}$
- $\gamma \in \{1, 2, 5\}$
- $\delta \in \{1.0, 0.025\}$

2.1.2 価値関数繰り返し法 (Value Function Iteration; VFI)

まずは、一番有名な価値関数を繰り返し計算していくことによって最終的に最適解を導出する計算法 (Value Function Iteration; VFI) を紹介しよう。VFI を選択する理由は、

- 価値関数を繰り返し計算する場合には縮小写像の性質 (Contraction Mapping Property) があるので、安全 (Safe) で、信頼性があり (Reliable)、収束する (Convergence Property)*7。
- 価値関数は収束するのか?
 1. 数値計算では定義域は必ず有限だから問題なし (Stokey, et al.[115])。
 2. 同次関数であれば大丈夫 (Alvarez and Stokey[5])。

言い換えると、他のアプローチでは必ずしも安定しなかったり、繰り返し計算をしていった結果が真の解に収束しなかったりする場合がある。また、VFI は、モデルが複雑であってもそのモデルをベルマン方程式の形にすることが出来れば数値的に分析可能にしてくれる非常に便利なツールで

*5 DSGE モデルの推計の場合には、通常、いろいろなパラメーターの下でモデルを解くことになる。

*6 例えば、Cooley[28] や Hansen and Heckman[47] を参照せよ。

*7 Santos and Vigo[109] を参照せよ。

ある。ただし、計算速度は他のより「洗練された」、「新しい」手法に比べると遅いため、推計等に利用するにはあまり向いていない。

動的最適化問題を解く際に用いられる方法は、大きく分けて二種類の方法がある。

1. 状態変数や操作変数を離散化して解く方法 (Discretization Approach)
2. 解きたい関数 (政策関数) を有限個のパラメータで表現する方法 (Parametric Approximation Approach)

モデルを理論的に解く場合、通常、変数に連続性を要請する。また、関数方程式を解くためには様々な関数の集合である関数空間を考える。例えば、閉区間 $[a, b]$ 上の関数を考えてみましょう。連続区間をコンピュータで扱うのは不可能であり、何らかの方法で有限個に離散化する必要があります。また、関数の定義域を \mathbb{R}^n などとしてもコンピュータでは扱えないため、その閉部分空間に範囲を狭める必要がある。このような近似が数値計算の結果にどのような影響を与えるのかはそれ自体、重要な問題である。また、離散近似をして計算した結果と、解析的な解とに一对一の対応関係があるのかについても注意を払わなくてはならない。

1. 状態変数と操作変数を離散化 (Discretized Approach) 状態空間と操作変数が共に離散的な場合の動的計画法の解法を簡単に解説する。このアプローチは、非常に遅くコンピュータのメモリも大量に消費するが、安定しており、強い非線形性があるモデルでも扱うことが可能な点が長所である*8。

まず、状態変数 k および操作変数 k' をそれぞれ離散 n 個に区切る ($\{k_i, k'_j\}_{i,j=1}^n$)。資本の状態は離散個に区切った値しかとらないとする。そのため、区切り方が荒いと精度が落ちる。当然、状態変数の上限 \bar{k} 及び下限 \underline{k} を設定する必要がある。下限については借入制約等を想定している。上限は、シミュレーションなどで到達しない程度に上にしておけばよい*9。離散個に区切った状態変数 (及び操作変数) の各点の事を、グリッド (Grid)、ノード (Node) あるいはメッシュ (Mesh) などと呼ぶ。このとき、ベルマン方程式は次のようになる。

$$v(k_i) = \max\{u(k_i^\alpha + (1 - \delta)k_i - k_j) + \beta v(k_j)\}.$$

離散個のグリッド数を増やしていけば、精度は高まっていく。ただし、メモリを大量に消費する

*8 最近の論文でこのアプローチをそのまま使っている研究はあまりないかもしれないが、簡単なモデルを始めに解いてみる手法としては有用である。Rust[105] は状態空間を小さくする事で Curse of Dimensionality を解消する方法を提案している。

*9 例えば後で説明する Bewley モデルでは、政策関数と 45 度線が交わる領域より上にとどまり続けることはないため、上に有界とする事が出来る。

ため、状態変数が増えていくと解けなくなる。以下、アルゴリズムの概観である。

ステップ 1:(グリッド生成) 状態空間及び操作変数を有限個のグリッドに区切る。更に、この有限個のグリッド上における価値関数 v^i の初期値を推測 (Initial Guess) する。価値関数は収束するので、始めは 0 からスタートしても問題ないし、よりよい初期値を知っている場合にはそれを利用する。

ステップ 2:(収束の基準) 収束の基準になるパラメータ ε を与えておく。どのような値にするかはモデルによるが、あまり緩くすると問題を解いたことにならないし、厳しくしすぎるといつまでたっても収束しないため注意。

ステップ 3:(効用関数) 効用関数 $u(k_i^\alpha + (1 - \delta)k_i - k_j)$ を各グリッド上で評価する。よって、 $n \times n$ の行列になる。

ステップ 4(価値関数を繰り返し計算): (a) 各 k_i について

$$v(k_i) = \{u(k_i^\alpha + (1 - \delta)k_i - k_j) + \beta \hat{v}(k'_j)\},$$

を計算する。右辺第 2 項の $v(k'_j)$ は、初期値では上で与えたもの (例えばゼロ行列) を使う。

(b) 各 k_i について、 $v(k_i)$ を最大にする k_j を探す (最適政策)。行列になっているので、最大値を探すのはコンピュータにとって非常に簡単である。(c) 古い価値関数 \hat{v} と新しい価値関数 v が十分に近ければ、すなわち誤差が上で設定した ε の範囲内であれば、真の価値関数を得られたのでストップ。そうでなければ、 $v(k_i)$ を $\hat{v}(k_j)$ に代入して、同じ計算を繰り返す。これを繰り返していくと、縮小写像の性質があるため、いずれ収束するはずである。

[Matlab Code1: 価値関数及び政策関数]

2. 操作変数が連続な場合 (Parametric Approximation Approach) 上記の方法は、状態変数と操作変数の両方を離散化しているため、メモリの問題以外にも、精度の面で問題がある。そこで、未知の関数をパラメトリックに計算する方法を考えたい。例えば政策関数を多項式などによってパラメトリックに表現できれば、ある状態変数 k の下での k' を、任意の $k \in [\underline{k}, \bar{k}]$ で計算できることになる。具体的には、状態空間の評価点 (Evaluation Point) を離散個 $\{k_i\}$ だけ選んできて価値関数及び政策関数 $\{v(k_i), g(k_i)\}$ を計算し、評価点以外の個所については、何らかの方法 (線形近似、多項式近似、スプライン近似他) で近似することになる。

関数の近似にはいろいろな方法がある。例えば、単純に評価点上の任意の二点 $\{v(k_i), v(k_{i+1})\}$ を直線で結ぶ方法も一つの近似であるし、より洗練された方法もある。詳細は Judd[63] の第 6 章

を参照してほしい。ここでは、Johnson et al.[59] によるスプライン近似を用いた動的計画法の解法を紹介する^{*10}。

ステップ 1:(グリッド生成) 状態空間の評価点を有限個のグリッドに区切る。グリッドは等分である必要はなく、流動性制約に直面しやすいゼロ近辺を多めにする方が精度が高くなる。上と同様に、この有限個のグリッド上における価値関数の値 $\hat{v}(k'_j)$ の初期値を推測する。価値関数は収束するので、始めは 0 からスタートしても大丈夫である。上で計算した価値関数を初期値とすると、収束がはやくなる。

ステップ 2:(収束の基準) 収束の基準になるパラメター ε を与えておく。どのような値にするかはモデルによるが、あまり緩くすると問題を解いたことにならないし、厳しくしすぎるといつまでたっても収束しないため注意。

ステップ 3(近似・評価): 近似点 k_i 上にはない価値関数の値については、線形近似や多項式近似、スプライン補間などを使って近似する必要があるため、その係数を計算する^{*11}。 $\hat{v}(k, \mathbf{b})$ をパラメター \mathbf{b} を使って近似した時の、 k 上での価値関数の値とする。

ステップ 4(最適化): 各 k_i について、

$$v(k_i) = \max\{u(k_i^\alpha + (1 - \delta)k_i - k') + \beta\hat{v}(k'; \mathbf{b})\},$$

を計算する。最適解を得るためには、ニュートン法などの手法が必要になるため、ここをどう工夫するかで計算精度やスピード、安定性が変わってくる^{*12}。このステップで新しい価値関数 $\{v(k_i)\}$ 及び政策関数 $\{g(k_i)\}$ を得る。

ステップ 5: 新しいデータ $\{v^i\}$ を使って、価値関数を求めるためにステップ 3 に戻る。ステップ 3 と 4 を繰り返していくことによって価値関数は収束していくため、十分に価値関数の繰り返し誤差が小さくなったらそこでストップする。

[Matlab Code2: 価値関数及び政策関数の収束]

- 価値関数繰り返し法は安定的に収束する。
- 安定性は数値計算をする上で非常に重要な性質で、計算速度を速める前にまずはラフなモデルを使って、確実に結果が得られることを確認すると、後で泣かないですむ。

^{*10} スプライン近似とは、任意の 2 点間をスムーズな 2 次関数で近似して、更に評価点上での微分可能性を維持するような近似方法である。詳細は、Judd[63] や Quarteroni et al.[101] を参照せよ。

^{*11} Judd and Solnick[67] は、線形補間及び Schmaker's Shape-Preserving Spline を使った場合、ベルマン・オペレータに凹性の性質や収束の性質が存在する事を証明している。

^{*12} 最適化については、Judd[63] の 4 章を参照せよ。ここでは、Black Box としている。

- ただし、収束速度は遅い。価値関数を収束基準に使うより、政策関数を使う方が良いかもしれない。
- 収束速度を高めるためには、Howard's Policy Iteration 等の方法が知られている。価値関数の性質や計算手法については多くの研究があるので、利用できるものは非常に多い。

2.1.3 政策関数繰り返し法 (Policy Function Iteration; PFI)

- Rust[104]

[To Be Completed.]

2.2 オイラー方程式を使ったアプローチ

前記の数値計算手法は動的計画法の好ましい性質を利用している。多くの動学的最適化問題がベルマン方程式の形で表現できるため、これらの手法は応用範囲が非常に広い。一方で、最適化モデルの一階条件であるオイラー方程式を利用した計算手法もいろいろ開発されている。ここではオイラー方程式を用いたいくつかのアルゴリズムを紹介する。

2.2.1 射影法 (Projection Method) とスペクトラル法 (Spectral Method)

オイラー方程式を用いた数値計算法で代表的なものは、政策関数を多項式などで近似して残差をやる、射影法 (Projection Method) と呼ばれるものである。射影法には、(1) スペクトラル法 (Spectral Method) と (2) 有限要素法 (Finite Element Method; FEM) という2種類が存在している^{*13}。前者は関数空間全体を表現するパラメータを探すのに対して、後者は関数空間を細かくして小さな部分空間を線形補間等によって近似してそれをつなげることによって関数全体を表現する。よって、スペクトラル法を使って、多項式などで近似する場合、非線形制約があるモデルを解くには向いていない^{*14}。

基本的なアイデアは、オイラー方程式の誤差を最小にする意思決定関数を探す事である。オイラー方程式は、

$$u'(h(k)) = (1 - \delta + f'(k'))\beta u'(h(k')),$$

^{*13} 以下、日本語訳は水島・柳瀬 [129] に基づいている。

^{*14} スプライン近似を用いれば、射影法でも非線形性が強いモデルを扱える。詳細は、Judd et al.[65] や Kubler and Schmedders[81] を参照せよ。

である。ただし、先行研究にならって貯蓄関数 $k' = g(k)$ ではなく消費関数 $c = h(c)$ を政策関数としている。そのため、我々が知りたいのは消費関数である $h(k)$ となる。状態空間 $k \in [\underline{k}, \bar{k}]$ 上のスムーズな関数 $h(k)$ を何らかのパラメーター $\{a_i\}$ で近似した関数を

$$\hat{h}(k; a) = \sum_{i=0}^n a_i \phi_i(k)$$

と書くことにする^{*15}。ただし、 a は近似のパラメーターである多項式の係数であり、 $\phi_i(k)$ は基底 (Basis) と呼ばれる。よって、最終的な目標はオイラー方程式の残差関数 (Residual Function)

$$R(k; a) = \beta \frac{u'(f(k) + (1 - \delta)k - \hat{h}(k, a))}{u'(\hat{h}(k, a))} (1 - \delta + f'(f(k) + (1 - \delta)k - \hat{h}(k, a))) - 1,$$

を最小にするようなベクター a を探すことに集約出来る。ただし、残差関数は状態空間 $[\underline{k}, \bar{k}]$ 上で定義されている。連続空間上のあらゆる点で残差がゼロになるのが理論的には正しいが、数値計算ではそのような表現は出来ない。そのため、「最小にする」事の数学的な定義が必要になる。ここでは二つの方法を紹介しておく^{*16}。

コロケーション法 (Collocation Method) 評価点 $\{k_i\}$ を任意に導出して、

$$R(k_i; a) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

とする。有限個であるため計算が容易であり、評価点には関数近似のためのグリッドを使えばよい。

ガラーキン法 (Galerkin Method) 残差に重み (Weight) $\Psi(k)$ を付けて

$$\int_{\underline{k}}^{\bar{k}} \Psi(k) R(k; a) dk = 0,$$

を満たすようにすれば、オイラー方程式の誤差を最小にする意思決定関数となる。重みには、多項式の基底を用いる。しかし、数値計算において積分をそのまま計算する事は出来ないため、積分をさらに何らかの方法で近似をする必要がある。

以下、各ステップは Judd(1998) の 11 章に基づいている^{*17}。

^{*15} 例えば、 n 次の多項式であれば $\hat{h}(k, \theta) = \sum_{i=0}^n a_i k^i$ となる。ただし、単純な多項式 (Ordinary Polynomial) は高次の一階偏微係数が Colinear になるため近似にはあまり向いていない。直交多項式 (Orthogonal Polynomial) である Chebyshev 多項式はこの点で望ましい。

^{*16} 他にも、最小二乗誤差を最小にするなどが考えられる。ここで挙げた以外の方法については、Judd[61][63] 及び McGrattan[90] を参照せよ。

^{*17} 詳しくは、Judd(1998) の p.204 及び Judd(1992) を参照せよ。

ステップ 1 関数を近似する際に必要になる基底を選択する。ここでは直交多項式である Chebyshev 多項式を選択する。

ステップ 2

- 近似の程度 n を選択する。ここでは $n = 10$ とした。
- Chebyshev 多項式で近似をしたいが、そのためにはまず「どこで評価するか」を決定しなくてはならない。そのため、コロケーション法における Chebyshev 多項式の評価点、あるいは積分で必要になる評価点 (Quadrature Point) の数を選択し、評価点を設定する^{*18}。ただし、多項式の基底に Chebyshev 多項式以外 (例えば線形近似) を使う場合には、評価点の選択はそれほど重要ではない。Quadrature Point は、CompEcon の関数 qnwlege を使って Gauss-Legendre Quadrature に基づいて計算している^{*19}。
- 評価点が得られたので、 n 次の Chebyshev 多項式の基底を各評価点上で計算する。Chebyshev 多項式の基底は次のようになる。

$$\phi(k) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\arccos k_1) & \cdots & \cos((n-1) \times \arccos k_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(\arccos k_n) & \cdots & \cos((n-1) \times \arccos k_n) \end{pmatrix}$$

ただし、 n は Chebyshev Point の数あるいは Quadrature Point の数である。Chebyshev 多項式を作る場合には、 k の各要素は必ず $[-1, 1]$ 区間になければならない。

- 例えば、単純な多項式の場合には、

$$\phi(k) = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & \cdots & k_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k_m & \cdots & k_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

となる。

- 初期値 a_0 を決定する。どうやって決定するかが大きな問題!

ステップ 3&4 残差関数 (Residual Function) を作る。後で Root-Finding をするため、残差関数を求めたい変数 a_0 のみの関数にしたい。変数の数 (a_0 の要素の数) と方程式の数が一致しないといけないため、残差関数は n 本の方程式になる^{*20}。

^{*18} 何故、Chebyshev 評価点を求めるかについては Judd(1998)、p.211 参照せよ。

^{*19} Gauss-Legendre Quadrature Point の計算の仕方については、Judd[63]、p.257 や Atkinson[8]、p.270 参照せよ。

^{*20} 方程式の数と変数の数が一致しない場合には、最小二乗誤差を最小化することになる。

コロケーション法 コロケーション法 (選点法) では各 Chebyshev ノードにおいてゼロになるような a_0 を求める。よって残差関数は、

$$\begin{aligned} \text{residual} &= \text{resid_collocation}(a_0) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{h}(k_1)^{-\gamma} - \beta \cdot \hat{h}(k_1')^{-\gamma} \cdot (A\alpha k_1'^{\alpha-1} + 1 - \delta) \\ \vdots \\ \hat{h}(k_n)^{-\gamma} - \beta \cdot \hat{h}(k_n')^{-\gamma} \cdot (A\alpha k_n'^{\alpha-1} + 1 - \delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(k_1; a_0) \\ \vdots \\ R(k_n; a_0) \end{bmatrix} \sim n \times 1 \end{aligned}$$

ガラーキン法 求めたいのは、

$$\int_{\underline{k}}^{\bar{k}} \psi_i(k) R(k; a_0) dk, \quad i = 1, \dots, n,$$

ただし、ガラーキン法では重みとして Chebyshev 多項式の基底である $\psi_i(k) = \phi_i(k)$ ($i = 1, \dots, n$) を使い、積率法では $\psi_i(k) = k^i$ ($i = 0, \dots, n-1$) を使う。 $R(k; a_0)$ はコロケーション法で求めた残差関数と基本的に同じだが、評価点が Chebyshev 評価点ではなく、数値積分のために求めた Gauss-Legendre Quadrature Point になっている。数値積分をする計算ために、Gauss-Legendre Quadrature に基づいて近似をする。

$$\int_{\underline{k}}^{\bar{k}} \psi_i(k) R(k; a_0) dk \approx \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{qn} \omega_l \cdot \phi_{1,l}(k) \cdot R(k_l; a_0) \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{qn} \omega_l \cdot \phi_{n,l}(k) \cdot R(k_l; a_0) \end{bmatrix} \sim n \times 1$$

Matlab の計算では、関数 `intgal.m` で、まず $qn \times 1$ のベクター $\omega \cdot R$ を計算してから、 $n \times qn$ の行列 $\phi_i(k)$ をかける。

ステップ 5 残差関数が a_0 の関数として作れたので、あとは零点になるような a を見つけてあげれば良い。 n 変数で n 本の方程式がある非線形のゼロ点を探す問題 (Root-Finding) であるため、Quasi-Newton Method を使う^{*21}。Root-Finding には、CompEcon の関数 `broyden` を使っている。

[Matlab Code3: 政策関数]

- K.L. Judd の HP に Judd[61] でつけた FORTRAN コードがある (解読はやや難)。

2.2.2 Time Iteration Spline Collocation Method

- 上記の射影法をそのまま使うのは、安定性に問題がある。

^{*21} 詳しくは Judd[63]、p.67 及び Miranda and Fackler[95] を参照せよ。

- Judd et al.[65][66] は、近似方法を Chebyshev 多項式ではなくスプラインにして、コロケーション法に従い、Time Iteration によって計算すると、比較的安定して解く事が出来るとしている。

2.2.3 有限要素法 (Finite Element Method; FEM)

- McGrattan[89][90] を参照。

[To Be Completed.]

2.2.4 内生的格子点法 (Endogenous Gridpoints Method: EGM)

VFI は非常に幅広いクラスの動学的最適化問題に応用可能であり、実際に多くのモデルを解く際に利用されてきた。しかし、価値関数の収束は遅く、各グリッド上における最適化のステップは時間がかかる上、安定度からも改善の余地が大きい。また、射影法も多くの先行研究で使用されているものの多変数の最適化問題になる事から、(解が見つかる時は極めて早い) 解く際には安定性の不安がある。そこで、VFI と比較した場合に一階条件が必要になることから応用可能性は狭まるものの、安定して計算速度も速い Carroll[20] による内生的格子点法を説明する。このアプローチはグリッドの取り方を工夫する事によって最適化が不必要になる。そのため、オイラー方程式が計算可能であれば、利用しやすいアプローチである。

EGM の一番のポイントは、VFI では現在の状態変数 k を有限個のグリッドで近似するのに対して、次期の資本 k' の方を有限個に区切る点にある。価値関数の右辺第 2 項を

$$\Omega(k'_{t+1}) = \beta v(k'_{t+1}),$$

と定義し直そう。現金保有高 $x_t \equiv f(k_t) + (1 - \delta)k_t$ 上の消費関数を $\tilde{h}(x_t)$ と書くことにする。このとき、包絡線定理から

$$\begin{aligned} c_t^{-\gamma} &= \Omega'(k'_{t+1}), \\ &= \beta(1+r)\tilde{h}(k'_{t+1})^{-\gamma}. \end{aligned}$$

である。そのため、消費関数 $\tilde{h}(x_{t+1})$ の初期値を (例えば線形ルールで) 与えれば、各資産水準 $\{k_{t+1}^1, \dots, k_{t+1}^n\}$ 上で $\Omega'(k'_{t+1})$ を容易に計算出来る。

CRRA 型の限界効用関数は逆関数を計算する事が可能なので、 $c_t^i = [\Omega'(k_{t+1}^i)]^{-\frac{1}{\gamma}}$ が各グリッド k_{t+1}^i 上で計算出来る。現金保有高は $x_t^i = c_t^i + k_{t+1}^i$ で求められるので、逆算する事によって現金

保有高上の新しい政策関数 $\tilde{h}(x_t)$ を導出する事が可能になる。これを繰り返していき、収束したものがオイラー方程式を満たす政策関数である。

- Carroll[20] で使用した Matlab(&Mathematica) コードは、C. Carroll の HP に置いてある。
- 次章の Bewley モデルは EGM で計算している (Fortran 90/95)。

2.2.5 摂動法 (Perturbation Method)

- 線形近似や二次近似で基本になるテイラー展開の考え方を更に発展させたもので、五次近似とかまで応用可能。
- ただし、手で計算できないので、Mathematica が必要になる (Matlab の数式処理は二階微分までなので注意)。
- 詳細は Judd[63] を参照。

[To Be Completed.]

2.3 数値計算の精度について

数値計算を行う際、常に計算精度について気にする必要がある。実際、近似解はオイラー方程式を Exact には満たしていない。そのため、オイラー方程式で測った時にどの程度の誤差が生じているかは、数値計算精度を測るうえで、一つの尺度になる。他にも様々な観点から、数値計算精度の測り方及び実際に測った際の誤差の程度について、研究が存在している。

- Judd[61]: オイラー方程式ベース
- den Haan and Marcet[33]:
- Santos[108]、Santos and Peralta-Alva[110]:
- Aruoba, et al.[7]

2.4 労働供給を内生化する

Aruoba, Fernandez-Villaverde, and Rubio-Ramirez[7] は労働供給を内生化した成長モデルを用いて、各種数値計算の精度を比較している。比較対象になっているのは、摂動法 (1 次、2 次、対数近似等)、スペクトラル法 (Chebyshev)、FEM、VFI である。

労働供給を内生化して生産性のショックがあるモデルは RBC のベンチマークであり、操作変数が 2 つあるケースに対応している。基本になっているモデルは、下記の通りである。

$$U = E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \frac{(c_t^\theta (1-l_t)^{1-\theta})^{1-\tau}}{1-\tau},$$

s.t.

$$c_t + i_t = y_t, \quad k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t,$$

$$y_t = e^{z_t} k_t^\alpha l_t^{1-\alpha}, \quad z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

このとき、一階条件は

$$\frac{(c_t^\theta (1-l_t)^{1-\theta})^{1-\tau}}{c_t} = \beta E_t \left\{ \frac{(c_{t+1}^\theta (1-l_{t+1})^{1-\theta})^{1-\tau}}{c_{t+1}} (1 + \alpha e^{z_t} k_t^\alpha l_t^{1-\alpha} - \delta) \right\},$$

$$(1-\theta) \frac{(c_t^\theta (1-l_t)^{1-\theta})^{1-\tau}}{1-l_t} = \theta \frac{(c_t^\theta (1-l_t)^{1-\theta})^{1-\tau}}{c_t} (1-\alpha) e^{z_t} k_t^\alpha l_t^{1-\alpha},$$

$$c_t + k_{t+1} = e^{z_t} k_t^\alpha l_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t$$

$$z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t.$$

となる。

2.4.1 主要結果

- 線形近似& 二次近似:
- 摂動法:
- FEM は、コードを書くのが大変だが精度とスピードの両面で高パフォーマンス
- VFI は、精度は高いものの収束までに時間がかかるのが問題

2.4.2 ダウンロード可能なコード達

Aruoba, et al.[7] で使用されたコードは下記の HP からダウンロード可能である。

- Aruoba et al.[7]: <http://www.econ.upenn.edu/~jesusfv/companion.htm>
- 摂動法は Mathematica、線形近似は Matlab、それ以外は Fortran で書かれている。

3 Ramsey から Bewley へ

一部門最適成長モデルにおいて代表的個人を仮定できるのは、保険市場の完備性を仮定しているためである。このとき、社会計画者が解く配分問題と市場において達成された配分は一致する。しかし、経済活動をしている主体（家計や企業）は固有のリスク (Idiosyncratic Risk) に直面しているかもしれない。もしそのようなリスクをシェアする機会がなければ、固有ショックの実現に応じて、始めは同質的であった経済主体は時間とともに異なった経済状態になっていく。

この章では、代表的個人モデルから異質な経済主体モデルへの拡張を考えることにする。以下では、無数の家計が存在して、各家計が所得についてショックを受ける異質な家計モデルを考えるが、企業の異質性にも応用可能である^{*22}。

3.1 固有リスクモデル (Income Fluctuation Problem)

3.1.1 セットアップ

モデルの基本的なセットアップは Aiyagari[2] 及び Huggett[53][55] に基づいており、このタイプのモデルを総称して Bewley モデルと呼ぶ^{*23}。無限期間の生産経済を考えよう。 t は時間を表している。経済主体は測度 1 で $[0, 1]$ 区間の連続体上に無限人存在している。家計は無数（連続体）に存在していて、0 期には同質的とする。各家計は、無限期間の効用の割引現在価値を最大化するように消費 c_t を決定する。全ての家計は同じ効用関数を持ち、目的関数は、

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

となる。ただし、 β は割引因子で $\beta \in (0, 1)$ とする。瞬時効用関数は CRRA 型を仮定し、 γ は相対的危険回避度（及び異時点間の代替の弾力性の逆数）を表すパラメータである。

t 期における家計は、前期からの資産 a_t と労働所得 y_t を所与として、今期に消費をするか次期のために貯蓄をするかの意思決定を行う。よって、予算制約は

$$c_t + a_{t+1} \leq (1 + r_t) a_t + y_t$$

となる。ただし、 r_t は利子率である。また、家計は流動性制約に直面しており、 $a_t \geq 0$ とする^{*24}。

^{*22} 例えば、Campbell[19] を参照せよ。

^{*23} Ljungqvist and Sargent[83] の 16&17 章を参照せよ。

^{*24} Aiyagari[2] は資本保有の最低限として、自然な借入制約 $a_t \geq \varphi$ を置いている。借入制約 φ は、最も悪い所得状態が続いたとしても返済できる最低限の額として決まる。よって、最悪の所得状態がゼロであれば、 $\varphi = 0$ である。Chatterjee et al.[23] はより複雑なデフォルト制約を課したモデルを分析している。

Bewley モデルの最大の特徴は、労働所得 y_t に各家計に固有のリスクが存在していることである。 t 期において、各家計は $\{e^1, \dots, e^J\}$ という J 種類の労働保有量 (Labor Endowment) のどれかを受け取るとする^{*25}。家計は現在の労働保有量 e_t を非弾力的に供給し、一単位当たり w_t だけの賃金を受け取る。よって、賃金と労働保有量の積 $w_t e_t$ が労働所得である。次期の労働保有量 e_{t+1} は今期の労働保有量 e_t にのみ依存して決定する。現時点で e^i が実現しており、次期に e^j が実現する推移確率を $\pi(e^j|e^i) > 0$ と書くことにしよう。家計が無数に存在していることから、大数法則によって、推移確率は次期に各保有量 e^j が実現した家計の割合も表している。推移確率は一意的な定常分布 π^* を持つと仮定する。この仮定に基づくと、それぞれの家計は労働所得について不確実性に直面しているにもかかわらず、各期のクロスセクションでの労働所得の分布は時間を通じて常に一定となり、マクロ経済における不確実性は一切存在しなくなる。労働所得がランダムで各家計の実現値が異なることから、良い状態が実現し続けた家計は多くの貯蓄を保有し、悪い状態ばかりとなった家計はほとんど貯蓄が出来ない。そのため、たとえ初期状態として平等な資産分布を仮定しても、時間の経過と共に内生的に資産格差が生じる。

家計の消費・貯蓄問題を、動的計画法を使って再帰的な環境の下での最適化問題として定義しなおそう^{*26}。Bewley モデルにおいて各家計の状態は、現在保有している資産と労働保有量の実現値 (a, e) で記述可能であり、時間 t には依存しない。この組が状態変数である。このとき家計の最適化問題は次のように書き換えられる。

$$v(a, e) = \max \left\{ \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta \sum_{e'} \pi(e'|e) v(a', e') \right\}, \quad (2)$$

$$\text{s.t. } c + a' \leq (1+r)a + we, \quad a' \geq 0. \quad (3)$$

但し、 $v(\cdot)$ は価値関数であり、 a' 、 e' は次期の変数を表している^{*27}。貯蓄量が a で労働保有量が e の状態にある家計の意思決定 (次期の貯蓄) を $g(a, e)$ と書くことにする (政策関数)。一階条件をまとめると、家計の効用最大化問題の必要条件として、次のオイラー不等式と呼ばれる式を導出できる。

$$u'(c) \geq \beta(1+r) \sum \pi(e'|e) u'(c'), \quad (4)$$

^{*25} 労働保有量を近似する際、よく使われるのが AR(1) モデルを近似する Tauchen 法である。詳しくは、Tauchen[117]、Tauchen and Hussey[118]、Floden[43] 及び補論を参照せよ。

^{*26} Ljungqvist and Sargent[83] は“Recursive Method”を次の2つの条件で特長付けている。(1) 経済の推移は状態変数の推移によって決定される。(2) 各主体は、状態変数のみに基づいて意思決定を行い、意思決定は政策関数として表現される。

^{*27} 動的計画法については、Stokey et al.[115] が数理的に厳密な解説を行っている。動的計画法になじみのない初学者は先に Adda and Cooper[1] などを読むことを強く勧める。

家計行動は労働所得がランダムになっている以外はシンプルなものであるが、CRRA 型効用関数を仮定したときに解析的な解は存在しない。そのため、家計の意思決定を知るには数値計算に頼る必要がある。

3.1.2 家計行動の理論的特徴付け

もし利子率 r_t がマイナスの値をとるのであれば、ポンジゲームにより明らかに解は決まらない。よって、家計の意思決定問題に解 $\{c_t\}$ 、 $\{k_t\}$ が存在するのであれば必ず $r_t \geq 0$ である。また、利子率が正であっても借入制約を置かなければ、最大化問題の解は決まってこない。先行研究でよく使用される借入制約は次の 2 種類である。

1. Aiyagari[2] が提案している自然な借入制約 (Natural Debt Limit)
2. アドホックな借入制約 ($a_t \geq 0$)

Aiyagari[2] は資本保有の最低限として、自然な借入制約 $a_t \geq \varphi$ を置いている。この制約 φ は、最低限 $c_t > 0$ を保証し、かつ横断性条件 (Transversality Condition) を満たすために必要な借入れの下限になるような金額である。よって、資本保有量が φ を下回らない限り、稲田条件がなくても、非負の消費が可能である。

補題 1 利子率 r_t が一定であるとする。このとき $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+r)^t} a_t \geq 0$ (Almost Surely) かつ $c_t \geq 0$ であるための必要十分条件は、 $a_t \geq -\frac{we^1}{r} = \varphi$ (Almost Surely) である。

補題 1 から、次の命題を証明することが出来る^{*28}。

命題 1 (w, r) が正値であるとする。このとき次が成立する。

- (i) $h(a, e)$ 及び $g(a, e)$ は a に関する連続関数となる。
- (ii) $h(a, e)$ は a について狭義増加関数で、あらゆる a に関して $h(a, e) > 0$ 。 $g(a, e)$ は a に関して増加関数である。

命題 2 $\beta(1+r) < 1$ とする。このとき、ある $\tilde{x} = we + (1+r)\tilde{a} \geq we_1$ が存在して、あらゆる $x \leq \tilde{x}$ で、 $h(a, e) = \omega$ 及び $g(a, e) = 0$ が成立する。また、状態空間 $[0, \tilde{a}] \times \{e\}$ 上でオイラー方程式は強い不等式で成立する。

命題 3 ある a_{\max} が存在し、 $a_{\max} > a_0$ という初期値を持つ $\{a_t\}_{t=0}^{\infty}$ は、あらゆる t について

^{*28} 以下の証明は、Huggett[55] を参照せよ。

$a_{\max} > a_t$ である。

系 1 $\beta(1+r) < 1$ とする。このとき、あらゆる $a \geq 0$ について、ある $e \in E$ が存在して、 $g(a, e) < a$ が成り立つ。

よって、利率が主観割引率よりも厳密に小さい時に資本ストック a が有界になる。この命題は、均衡の存在証明のために重要になる。何故ならば、各個人の貯蓄額が上に有界でなければ、集計したときの貯蓄額が無限になってしまい、均衡が存在しなくなる可能性があるからである。この命題は予備的貯蓄の存在を示唆している。実際、 $r^{\text{incomp}} < r^{\text{comp}} = \rho$ であれば貯蓄額は完備市場のときよりも不完備のときの方が大きくなる。

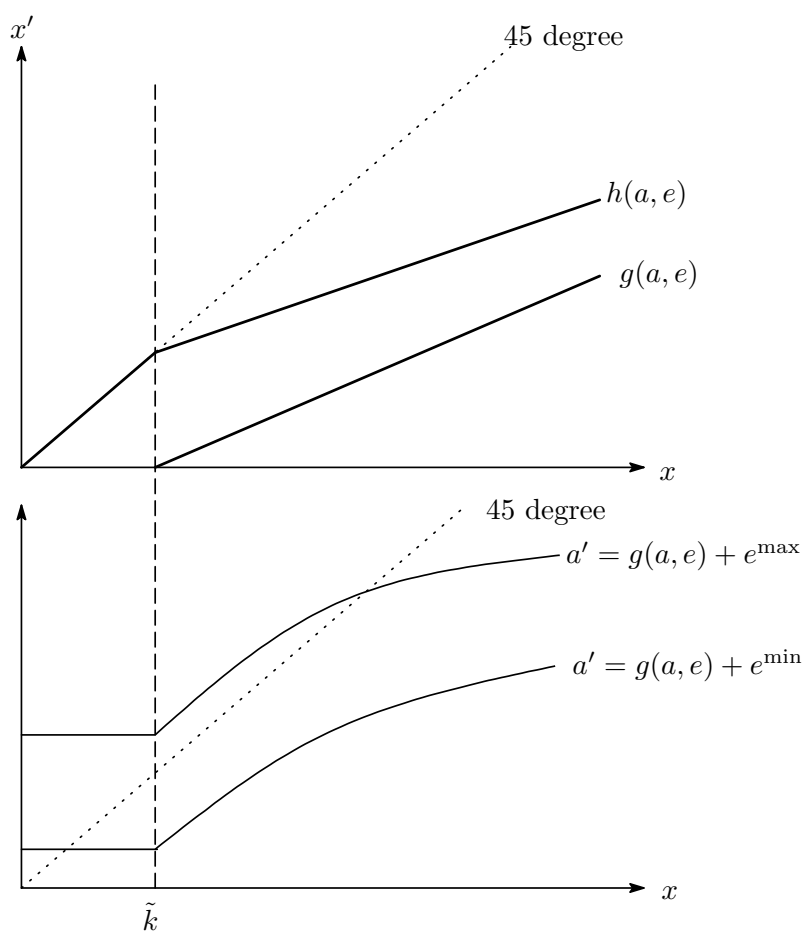


図 1 政策関数の特徴づけ

3.1.3 推移確率と分布関数

所与の利子率及び賃金の下で、各家計の意思決定をモデル化できた。次に、各状態 (a, e) での家計の意思決定を集計する方法を考えていこう。例えば、 $\pi(e'|e) = 0.8$ であったとしよう。これは現在の労働保有量が e である家計のうち 80% の家計が e' という状態に推移することを意味する。例えば、現在失業している家計の中で 8 割の家計は次期に職を見つけられるような状況である。当然、労働所得及び資産の状態が異なる家計は異なった意思決定を行うため、政策関数と労働保有量の推移確率を使えば、家計の状態を表す分布を計算する事が可能になる。 $\Psi(a, e)$ を家計の状態 (a, e) の割合を表す分布関数とする。

$x = (a, e)$ とする。現在の状態が $x \in \hat{\mathcal{X}}$ である家計が次期に $B \in \mathcal{B}(\hat{\mathcal{X}})$ が実現する確率を推移関数 $Q : \hat{\mathcal{X}} \times \mathcal{B}(\hat{\mathcal{X}}) \rightarrow [0, 1]$ と書くことにする。このとき、関数 Q を

$$\begin{aligned} Q(x, B) &= \pi(\{e' \in \mathcal{E} \mid (a(a, e), e') \in B\} \mid e), \\ &= \sum_{e' \in B} \begin{cases} \pi(e'|e) & \text{if } a(a, e) \in B, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

で定義することが出来、関数 $Q(\cdot, \cdot)$ を使って経済状態の推移を定義することが出来る。 $\Psi(B)$ を $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ 上で定義された確率測度とする。すなわち、 Ψ は家計の状態が (a, e) となる割合を表している。あらゆる $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ について、

$$\Psi_{t+1}(B) = \int_{\hat{\mathcal{X}}} Q(x, B) d\Psi_t \equiv \Gamma(\Psi(B)) \quad (6)$$

が状態 B が実現する確率である。時間を通じて一定となる定常分布を Ψ^* と書くことにする。

3.1.4 生産関数

Aiyagari[2] は利子率 r 及び賃金 w が内生的に決定される一般均衡を考えている。要素価格がどのように決定されるかを明示的にするため、代表的企業を導入しよう。企業は各家計が蓄積した資本の集計量 $K = \int g(a, e) d\Psi$ を利子率 r で借り、労働保有量 e の供給に対して賃金を w だけ支払うことによって生産を行う。総労働供給は $N = \sum e \pi^*(e)$ である。ただし、 $\pi^*(e)$ は定常分布での e の実現確率である。企業の生産関数は

$$Y = K^\theta N^{1-\theta}$$

とする。

3.2 均衡価格を見つける

以上より、均衡を定義することが出来る。Aiyagari[2] は、時間を通じて資産分布、利子率及び賃金が変わらない定常均衡に注目している。資産分布が定常的にならないケースは次章で議論する。定常再帰的競争均衡 (Stationary Recursive Competitive Equilibrium) を次のように定義する。

定義 (定常再帰的競争均衡) 定常再帰的競争均衡とは、以下を満たす価値関数 v 、政策関数 g 、利子率 r 、賃金 w 及び分布関数 Ψ^* である。

(i) 利子率 r 及び賃金 w を所与としたとき、 v は家計のベルマン方程式 (2) を満たし、 $g(\cdot)$ はそれに伴う政策関数になる。

(ii) 企業は利潤を最大化している。即ち、

$$r = \theta K^{\theta-1} N^{1-\theta} - \delta, w = (1 - \theta) K^{\theta} N^{-\theta}.$$

(iii) 財、労働及び資本市場は均衡している。

(iv) 資産分布は時間を通じて不変である。

やや複雑な印象を受けるかもしれないが、価格を所与として家計及び企業は最適な意思決定を行い、資本、労働、財の各市場で需給が一致しているという通常の市場均衡概念と同じである。ワルラス法則があるため市場均衡の三つの条件の内、二つを満たせばよいが、労働市場の均衡に関しては労働供給が非弾力的であることから自明である。よって、財市場と資本市場の均衡条件のうち、一つに注目すればよい*29。

3.3 均衡の存在について

資本市場の需給バランスは、各消費者の貯蓄額をまとめた資本供給量と、生産者が決定する資本需要によってきまる。各消費者の資本供給をまとめた $Ea(r)$ は各個人の貯蓄のまとめたものであるから、各家計に関する積分値 $Ea(r) = \int a d\Psi$ で決まる。各家計の意思決定は (w, r) を所与としたときのものであったから、これに応じて貯蓄額が決まってくる。しかし、労働供給量は外生であるため、 w は r の関数になる。よって、マクロの資本供給量 (=貯蓄額) は利子率 r のみの関数になる。一方、企業の資本需要を $K(r)$ と書くことにする。上と同様の理由により、資本需要も利子率のみの関数である。

*29 Duffie, Geanakoplos, Mas-Colell, and McLennan[36] はより幅広いクラスのモデルにおける均衡の存在について考察している。

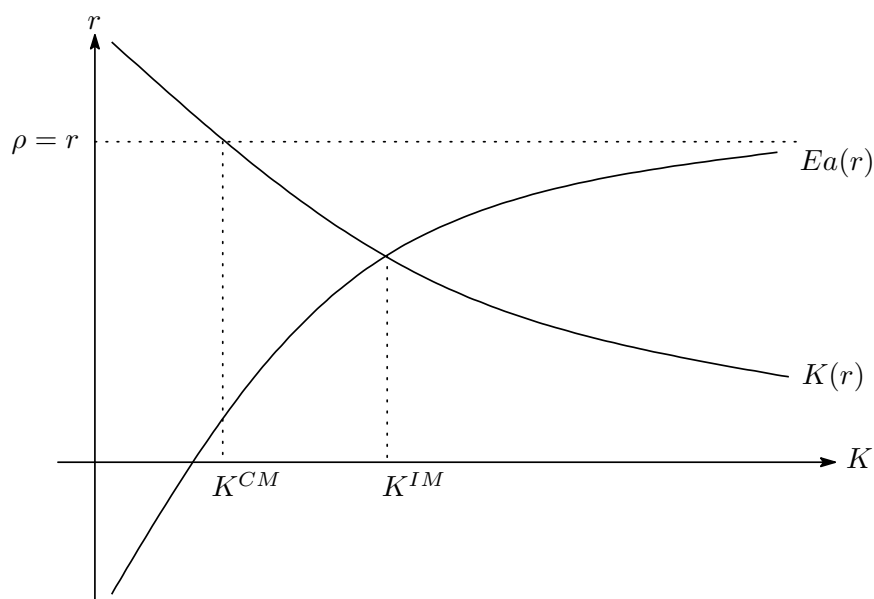


図2 均衡の存在

よって、資本市場の均衡とは

$$Ea(r) = K(r) \quad (7)$$

を満たす均衡利子率 r を見つけることに等しい。これから均衡利子率の存在を、いくつかのステップにわけて証明しよう。直観的には次の図のような形になる。

資本需要と資本供給が利子率に関して連続な関数で、

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow -\delta} K(r) = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} K(r) = 0 \\ \lim_{r \rightarrow -\delta} Ea(r) < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} Ek(r) > 0 \end{aligned} \quad (8)$$

であれば、均衡利子率の存在がいえる。更に、各関数が単調であれば均衡は一意である。しかし、均衡の一意性に関しては、フォーマルな証明はまだ得られていない^{*30}。以下では、次の3ステップで証明をしていく。

1. 総需要関数 $K(r)$ が利子率に関して連続で、単調に右下がりになる。

^{*30} よって、Aiyagari[2] が図を使って説明していることは、厳密には正しくない可能性がある。しかし、コンピュータシミュレーションでは初期値に関する均衡利子率の鋭敏性などは観察されないため、特に問題はない。

2. 各利子率 r の下で定常測度 Ψ_r が存在して、総供給関数 $Ea(r)$ が Well-Defined となる。即ち、積分がきちんと定義できることの証明。更に、 r に関して連続であることを証明する。
3. $Ea(r)$ が (8) の性質を満たすことを証明し、均衡利子率が存在することを証明する。

ステップ 1 まず、供給が利子率に関して連続であることを証明しよう。

補題 2 資本需要 $K(r)$ は利子率 r に関して連続で、減少関数になる。

証明. $K(r)$ は r のみの陰関数で

$$r = F_K(K(r), N) - \delta$$

である。総労働供給は外生的に一定である。更に、生産関数に関する仮定から $K(r)$ は連続で、減少関数になる。 ■

ステップ 2 次に、 $Ea(r)$ がきちんと定義できることを示す。命題 3 より $\rho > r$ ならば、各消費者の貯蓄は上に有界である。よって、 Ψ_r が存在して積分をすることが出来るのであれば、 $Ea(r)$ も上に有界である。下への有界性は借入れ制約のため問題ない。

需要関数

$$Ea(r) = \int g(a, e) d\Phi_r \quad (9)$$

が定義されるためには、各 r について確率測度が Ψ_r が一意的に存在する必要がある。そのためには、利子率をある r に決めた時の確率測度

$$\Psi_r(B) = \int Q_r(x, B) d\Psi_r, \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

が存在するかが問題である。 r が決まれば、家計の意思決定問題から $g(a, e)$ が決まるため、 $Q_r(x, B)$ が計算出来る点に注意する必要がある。

関数 Ψ に関するオペレータ $T_r^* : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ を次の様に定義する。

$$(T_r^*(\Psi))(B) = \int Q_r(x, B) d\Psi \quad (10)$$

このオペレータが一意的な不動点を持てば、あらゆる r について一意的な確率測度 Ψ_r が存在して、(9) は Well-Defined である。

Hopenhayn and Prescott[52] の Theorem 2 は、次の条件 (i)-(vi) が満たされるとき、このような確率測度が存在することを証明している。

定理 1 (Thrm2 of Hopenhayn and Prescott, 1992) (i) \hat{X} is a compact metric space
(ii) \geq is a closed order defined on \hat{X}
(iii) $(\hat{X}, \mathcal{B}(\hat{X}))$ is a measurable space and $\mathcal{B}(\hat{X})$ is the Borel σ -field
(iv) Q is a transition function defined on $\hat{X} \times \mathcal{B}(\hat{X})$
(v) Q is increasing
(vi) the monotone mixing condition (MMC) is satisfied, i.e. there exists $\hat{x} \in X$, $\epsilon > 0$, and ℓ such that

$$Q^\ell((k^{\max}, e^{\max}), \{x : x \leq \hat{x}\}) > \epsilon$$

$$Q^\ell((0, e^{\min}), \{x : x \geq \hat{x}\}) > \epsilon$$

then there exists a unique stationary measure Φ , and Φ_0 converges to Φ .

$g_r(a, e)$ が連続で (Stokey, Lucas with Prescott[115], Theorem 3.8)、 Ψ_r が r に (弱収束の意味で) 連続であれば、Stokey et al.[115] の Theorem 12.13 から、総貯蓄 $Ea(r) = \int g(a, e) d\Psi_r$ は利子率 r に関する連続関数になる。よって、 $Ea(r)$ は $[-\delta, \rho]$ 上の連続関数である。

ステップ 3 最後に、連続な供給関数が (8) の性質を満たすことを示そう。利子率 $r = -\delta$ ならば、ネットの利子率は 0 に近づくため、全ての消費者は借り入れ制限一杯の \underline{a} まで借り入れるため、 Ea は \underline{a} になる。一方、Chamberlain and Wilson[21] は利子率 r が ρ に等しければ $k = \infty$ に発散することを証明している。そのため、均衡利子率が存在する。

$r \rightarrow \rho$ とすると $k \rightarrow \infty$ となることを直観的に説明しておく。個人の資本保有に関して、 $r < \rho$ ならば、異時点間の代替を満たす上でリターンが低いいため、資本保有のコストがかかる。一方、 $r < \rho$ であれば資本ストックの量は増加しているため、予備的貯蓄により、消費の平滑化がし易くなるというメリットがある。 $r \rightarrow \rho$ にすると、貯蓄のコストは減少していくが、それでも必ず正値の予備的貯蓄が存在するために、スムージングのために貯蓄をするインセンティブは減らない。よって、利子率が主観割引率に近づくとき、コストが減少して、メリットはなくならないため、貯蓄額はどんどん増えていくことになる。

以上の証明プロセスにおいて、 $Ea(r)$ の単調性に関しては明らかになっていない。利子率が上昇すると、現金保有高の内、利子収入部分 rk は上昇するが、 $w(r)e$ は増加するか減少するか明らかでない。そのため、 r に関する単調性は現時点では不明である。

分布関数に関する議論 この証明では、定常分布 Ψ^* への収束に関しては何も言っていない。もし、初期分布が $\Psi_0 = \Psi^*$ ならば再帰的定常競争均衡を維持できるが、 $\Psi_0 \neq \Psi^*$ からスタートした時にどうなるかは明らかでない。もし現在の経済が定常状態にないのであれば、資本分布は総資本量及び利子率に影響を与える。そのため、各消費者が次期の金利を予想するためには、来期の資本分布を知らなければならない。来期の資本分布は今期の資本分布によって決定されるから、各消費者の状態変数の中には資本分布が含まれないといけなくなる。しかし、この状態空間の拡大は理論的に非常に大きな困難をもたらす。Duffie et al.[36] は拡大した状態空間でのマルコフ均衡の存在を証明しているが、Bewley モデルに応用することは困難である。また、コンピューテーションの上でも状態空間の拡大は“Curse of Dimensionality”という大きな問題をもたらす。

3.4 Bewley モデルの数値計算

以上が、Bewley モデルの理論的性質である。これらを踏まえて、Aiyagari[2] モデルを数値計算によって解く方法を考えてみたい。ここで重要になるのは、代表的個人モデルと違い、社会計画者の配分問題と市場均衡が一致しない点である。そのため、各経済主体の意思決定をまず解いて、その後で市場が均衡しているかをチェックする必要がある。具体的なステップは以下の通りである。

1. パラメータを設定する。このとき、所得リスクについても特定化をする必要がある。
2. 利子率 r を任意に与える。総労働供給 N は決まっているため、企業の一階条件から (w, K) を逆算する事が出来る。 K を与えても良いが、値が直観的にわかりにくいので、利子率の方が良い。
3. 要素価格 (r, w) が一つ与えられたので、家計の最適化問題 (2) を解く事が出来る。
4. 各家計の意思決定関数が得られたので、推移関数に基づいて家計分布の推移を計算し、定常分布 Ψ_r^* を導出する。
5. 定常分布 Ψ_r^* を使って家計行動を積分して、総資本供給 $Ea(r)$ を計算する。
6. 総資本需要 $K(r)$ と総資本供給 $Ea(r)$ が一致する r を見つけるまで、2 - 5 を繰り返す。

3.4.1 政策関数を導出する

- 家計の最適化問題 (2) は、前の章で解いた動的最適化問題そのものである。そのため、VFI でも射影法でも EGM でも何でも使う事が出来る。

3.5 分布関数の計算

1. 分布関数をパラメトリックに近似 分布関数を計算する方法は大きく分けて、(1) 乱数を使ってシミュレーションをする方法と (2) 分布関数を数式から直接、導出する方法の 2 種類がある。シミュレーションに関しては政策関数が得られた後であれば比較的簡単に実行できるが、シミュレーション数次第で結果が変わる可能性がある点が問題である。

そこで、上のステップで求めた政策関数 $g(a, e)$ を使って、分布を計算する方法を簡単に解説しよう。分布関数も連続な関数であるため、貯蓄空間を有限個に区切り各グリッド上における分布を計算する必要がある。通常、グリッドの数は政策関数の導出の時よりも細かくする必要がある。まず、分布関数 $\Psi_0(a^i, e)$ の初期値を設定しよう。Aiyagari モデルでは分布は収束することが知られているため、一様分布などからスタートして問題ない。現時点で (a, e) である家計が次期に \hat{a}' だけ貯蓄するとしよう。しかし、必ずしも \hat{a}' がグリッド上にあるとは限らない。そこで、定数 ω を次のように設定する。

$$\omega = \frac{\hat{a}' - a_\ell}{a_h - a_\ell}, \hat{a}' \in [a_\ell, a_h]$$

$[a_\ell, a_h]$ は \hat{a}' を挟むグリッド値である。このとき、 (a, e) である家計は次期に a_ℓ と a_h に

$$\begin{cases} \pi(e'|e)(1 - \omega)\Psi_0(a, e) \\ \pi(e'|e)\omega\Psi_0(a, e) \end{cases}$$

という形で振り分けられる。こうして繰り返し計算をしていけば、定常分布を計算する事が可能である。

- 分布関数の計算: Aiyagari and McGrattan[3]

2. モンテカルロシミュレーション

- 分散などを計算するためにはこちらの方が便利だが、精度は上の方法よりも若干、落ちる。

3. 政策関数の逆関数を使う場合

- 政策関数の逆関数の計算がやや面倒。

[Matlab smodel2]

[Fortran: Bewley]

3.6 フロンティア

- 世代重複モデル: Imrohoroglu, Imrohoroglu, and Joines[58]
- MPI を使った数値計算関連の研究のフロンティア: Chatterjee, Corbae, Nakajima and Rios-Rull[23]
- Conesa, Kitao and Krueger[27]: <http://sagiri.kitao.googlepages.com/research>

第 II 部

数値計算の応用

4 集計リスクが存在する経済

4.1 何が問題なのか?

Bewley モデルは、各家計は固有の所得リスクに直面しているもののマクロ (集計) 変数は時間を通じて一定となる定常均衡のみを分析対象としている。この仮定は、例えば景気循環における経済格差の問題を考えたい場合などには、大きな障害となる。ところが、マクロ (集計) ショックが存在している経済では常に分布関数の影響を考える必要があるため、単純な拡張は非常に困難であることが知られている。マクロ経済の生産性に不確実性が存在しているとしよう。オイラー方程式 (4) を思い出して欲しい。Bewley モデルと違い、家計の意思決定に必要な次期の利子率 r_{t+1} にも不確実性が含まれる事になる。そのため家計は次期の利子率を予測する必要があるが、利子率は総資本 K_{t+1} の関数であり、総資本は分布関数 Ψ_{t+1} によって決定する。 $t+1$ 期の分布関数は現在の分布関数と推移法則から決定するため、次期の利子率を計算するためには各家計が現在の資産分布に関する情報を知っている必要がある。これは非常に強い想定である。

資産分布そのものを家計の状態変数に含めることは、理論的にも数値計算にも非常に困難な問題である。そこで、Krusell and Smith[76] や den Haan[29][30] は、分布関数そのものを状態変数に含めるのではなく、分布のモーメント情報のみを状態変数として、近似的な予測関数を用いることを提案している。理論的には分布関数そのものが必要であるから、全ての情報ではなく平均や分散といったモーメント情報のみを用いるのはかなり強い近似をしていると考えられる。しかし、Krusell and Smith[76] は分布関数ではなく現在の総資本の平均値 (一次のモーメント) だけから予測された次期の総資本は非常に当てはまりが良く、決定係数 R^2 は 1 に近い事を明らかにした。この結果は「近似集計 (Approximate Aggregation)」と呼ばれ、マクロショックの存在が存在していても、分布関数そのものを状態変数に含めなくても、平均だけでも非常に良い近似となり数値計算に適していることを示している。以下では、Krusell and Smith[75][76][79] に基づきながら、マクロショックを含めたモデルの概観を紹介していこう。

- 似たようなアルゴリズム: den Haan[29]、Reiter[102]
- 数値計算手法プロジェクト: den Haan, Judd and Juillard[32]

4.2 近似的に解を求める (Krusell&Smith アプローチ)

4.2.1 固有リスク

3章のモデルにマクロショックを含めよう。 A_t をマクロ生産性に関する集計ショックとする。簡単化のために、Krusell and Smith[76] にしたがってあらゆる t 期において $A_t \in \{A^g, A^b\}$ と仮定する。すなわち、マクロ経済の状態は好景気 $A_t = A^g$ と不況 $A_t = A^b$ のどちらかである。マクロ状態の推移確率を $A_{ij} = \Pr\{A_j|A_i\}$ と書く事にしよう。このとき推移確率行列は

$$\Pi_A = \begin{pmatrix} \pi_{gg'} & \pi_{gb'} \\ \pi_{bg'} & \pi_{bb'} \end{pmatrix}.$$

となる。更に、固有リスクは X 節のように失業と雇用の 2 状態であるとする。このとき (e, A) の推移確率行列は、

$$\Pi = \Pi_e \otimes \Pi_A = \begin{pmatrix} \pi_{gg'11'} & \pi_{gb'11'} & \pi_{gg'10'} & \pi_{gb'10'} \\ \pi_{bg'11'} & \pi_{bb'11'} & \pi_{bg'10'} & \pi_{bb'10'} \\ \pi_{gg'01'} & \pi_{gb'01'} & \pi_{gg'00'} & \pi_{gb'00'} \\ \pi_{bg'01'} & \pi_{bb'01'} & \pi_{bg'00'} & \pi_{bb'00'} \end{pmatrix} \quad (12)$$

と書くことが出来る。ただし、 $\pi_{AA'ee'}$ は状態 (A, e) から (A', e') への推移確率とである。また、 u_A を各状態における失業率としたとき、

$$\begin{aligned} \pi_{AA'00'} + \pi_{AA'01'} &= \pi_{AA'10'} + \pi_{AA'11'} = \pi_{AA'} \\ u_A \frac{\pi_{AA'00'}}{\pi_{AA'}} + (1 - u_A) \frac{\pi_{AA'10'}}{\pi_{AA'}} &= u_{A'}. \end{aligned}$$

とする。更に、Krusell and Smith[76] に従って

$$\begin{aligned} \pi_{bb'00'} &= 0.75 \times \pi_{bg'00'}, \\ \pi_{gg'00'} &= 1.25 \times \pi_{gb'00'} \end{aligned}$$

という条件を置いておく。これらの条件から、推移確率行列 (12) を完全に特定化することが出来る。失業率は好況時と不況時で異なり、失業の持続期間もマクロ状態に依存している。このような特定化はデータと整合的であるが、正確なカリブレーションをするにはクロスセクション情報とマクロ経済状態の情報の両方が必要となり、より困難になってくる。

前節のモデルと同様に総資本供給は家計の意思決定から決まるが、Cobb=Douglas 型の生産関数には集計ショックが含まれるため、競争的な市場では利子率及び賃金は

$$r_t = \theta A_t K_t^{\theta-1} N_t^{1-\theta} - \delta, \quad w_t = (1 - \theta) A_t K_t^\theta N_t^{-\theta}$$

となる。家計の意思決定は、基本となる Bewley モデルに状態変数として K を加えたものである。

4.2.2 アルゴリズムの概観

モデルのパラメータを設定しよう。モデルの1期間は四半期であると仮定する。各種パラメータは、表 X の Krusell and Smith[76] と同じとする。

- $\beta = 0.99, \delta = 0.025.$
- $\gamma = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\alpha = 0.36$
- 好況の平均持続期間 = 8 期間
- 不況の平均持続期間 = 8 期間
- 好況時の生産性 = 1.01
- 不況時の生産性 = 0.99
- 好況時の失業率 = 0.04
- 不況時の失業率 = 0.10
- 好況時の平均失業持続期間 = 1.5
- 不況時の平均失業持続期間 = 2.5

推移確率を決定するために、以下を特定化する。好況期及び不況期の平均持続期間は 8 期間、好況時の生産性は 1.01、不況時の生産性は 0.99 とし、好況時には失業率は 4% で不況時には 10% とする。また、好況時の平均失業持続期間は 1.5 期間、不況時の平均失業期間は 2.5 期間であるとする。このとき推移確率行列は、

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.851 & 0.123 & 0.583 & 0.094 \\ 0.116 & 0.836 & 0.031 & 0.350 \\ 0.024 & 0.002 & 0.292 & 0.031 \\ 0.009 & 0.039 & 0.094 & 0.525 \end{pmatrix}$$

となる。

Krusell and Smith[76] モデルを解くためのアルゴリズムの概観を示しておこう。

1. 予測関数を特定化し、パラメータを決める。Krusell and Smith[76] は今期の平均資本から次期の平均資本を予測する形で、

$$\ln K' = b_0(A) + b_1(A) \ln K$$

としている。

2. 予測関数を所与として、家計の最適化問題を解く。ベルマン方程式及びオイラー不等式は、状態変数に総資本 K とマクロ生産性 A が含まれる以外は前と同様であるため、前記の VFI でも EGM でも利用可能である。

$$v(a, e; K, A) = \max \left\{ \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta E v(a', e'; K', A) \right\},$$

$$\text{s.t. } c + a' \leq (1+r)a + we, \quad a' \geq 0.$$

利率及び賃金は現在の総資本 K から導出できる。 (a, K) 上のグリッド数は、 a について 200 個、 K について 20 個とした。 K の平均値は前節の定常均衡で既に解かれているため、その近辺で K のグリッドを取ることが出来る。

3. 政策関数 $a' = g(a, e; K, A)$ が求められたら、 N 人を T 期間シミュレーションする。Krusell and Smith[76] は $N = 5000$ 、 $T = 11000$ として、定常性を求めるためにシミュレーションの最初の 1000 期間を切り捨てている。X.3 節のように前向きに分布を計算する事も可能である。初期分布に、定常均衡で得られた分布を利用すると精度が高まる。
4. ステップ 3 で得られたデータを使って、新しい予測関数のパラメーター (\hat{b}_0, \hat{b}_1) を推計する。
5. 新しいパラメーターが古いパラメーターと十分に近くなったらストップする。
6. ステップ 5 までで予測関数のパラメーターが収束したにも関わらずフィット (決定係数: R^2) が良くなければ、予測関数の形状を変えてステップ 2 – 5 を繰り返す。

4.2.3 エルゴード集合の生成: (1) パラメトリックに近似

総資本の推移法則を求めたい。主観的な推移法則を使った家計行動が、均衡推移法則と一致するようにしたい。各 (e, \tilde{z}) について、 (k, K) 平面でより細かいグリッド上で最適な意思決定関数を決める。Krusell and Smith[76] は、 $k = 150 \sim 600$ 、 $K = 25 \sim 100$ 個くらいの等分したグリッドを用意する。グリッド上以外では線形補間を使って、近似する。Young[120] は、 $k = 5000$ 、 $K = 30 \sim 40$ 程度を使っている。

ステップ 1 初期分布 $\Psi_0(k, s)$ を設定する。Aiyagari モデルでは「集計変数は一定」という仮定を使っていたが、ここでは 11000 個の大きな数の集計ショックの実現値を生成する。定常なデータのみ採用するので、初期分布は大切。

ステップ 2 意思決定関数 $k' = g(k, s; K, \tilde{z})$ を使う。現在の総資本の水準をグリッド上に決める。線形補間を使うので、そのウェイト $a = \frac{K - K_i}{K_j - K_i}$ を決定する。現在の総資本水準から、 a を

使って次期の貯蓄を決定する。

$$\hat{k}'(k, s, \tilde{z}) = (1 - a)g(k, s; K_i, \tilde{z}) + ag(k, s; K_j, \tilde{z})$$

ステップ3 資産分布をアップデートする。まず、分布 $\Psi_0(k, s)$ 上のポイントを取る。上のルールを使って、そのポイント上における \hat{k}' が決まる。線形補間ウェイトをそのポイントで計算する

$$b = 1 - \frac{\hat{k}' - k_\ell}{k_h - k_\ell}, \hat{k}' \in [k_\ell, k_h]$$

このとき、各 (k, e) のポイントにいる家計は

$$\begin{cases} \pi_{ee'} \cdot b \cdot \Psi_0(k, e) \\ \pi_{ee'} \cdot (1 - b) \cdot \Psi_0(k, e) \end{cases}$$

に振り分けられる。

4.2.4 エルゴード集合の生成: (2) シミュレーション

[To Be Completed.]

4.2.5 近似集計 (Approximate Aggregation)

では、数値計算結果を確認していこう。次式は、予測関数の係数及びそのときの決定係数である。

$$\ln K' = 0.135 + 0.963 \ln K, R^2 = 0.999999, \text{ if } A = A^g$$

$$\ln K' = 0.123 + 0.965 \ln K, R^2 = 0.999998, \text{ if } A = A^b$$

上式が好況時で、下式が不況時である。決定係数が非常に1に近いことから、このような予測ルールが次期の総資本水準の予測精度として十分に正確であることを示している。この予測関数の精度の問題に関しては議論の余地があり、例えば、自己実現的な予測になっている可能性は否定できない。しかし、政策関数をみると、政策関数の非線形性は弱く、次期の総資本の予測は比較的簡単であることが読み取れる。例外的な部分は流動性制約に直面している家計であるが、彼らの割合がそれほど大きくないことが、予測を容易にしていると考えられる。

[Fortran: krusell_smith]

4.2.6 割引因子の異質性

割引因子が確率的な場合でも、

$$\ln K' = 0.146 + 0.960 \ln K, R^2 = 0.999994, \text{ if } A = A^g$$

$$\ln K' = 0.143 + 0.960 \ln K, R^2 = 0.999986, \text{ if } A = A^b$$

となり、結論は大きく変わらない。

[Fortran: bewley_beta]

[Fortran: krusell_smith_beta]

4.2.7 2次以上のモーメント情報の影響

- Young[120] は二次以上の情報を加えても精度の向上はそれほどない事を明らかにしている (オリジナルのままで十分に高精度)。
- 世代重複モデルにすると、影響が出てくる。世代の影響を明示的に考えると、意志決定の年齢毎の違いが大きくなるため、分布の影響が大きくなる。

4.2.8 人数の影響

- den Haan[30]: 資産価格モデルを使って、2人経済と連続体の経済主体が存在するモデルを比較

4.3 シミュレーションの精度

- den Haan[31]

4.4 State of the Art

- Algon, allais and den Haan[4]、Reiter[102][103]
- Krusell, Mukoyama, and Sahin[74]、Mukoyama and Sahin[96]
- Storesletten, Telmer, and Yaron[116]、Gourinchas[45]
- Krueger and Kubler[72]

4.5 ダウンロード可能なコード

- den Haan[29]: <http://weber.ucsd.edu/~wdenhaan/soft.html>
- Krusell and Smith[76]: <http://www.econ.yale.edu/smith/>
- Reiter[103]: <http://elaine.ihs.ac.at/~mreiter/research.html>

5 情報の非対称性、モラルハザードとコミットメント制約

5.1 私的情報モデル (Phelan&Townsend、Doepke&Townsend)

- Phelan and Townsend[99]
- Cole and Kocherlakota[25]、Doepke and Townsend[35]
- Fernandes and Phelan[39]、Phelan and Skrzypacz[98]

5.2 逆オイラー方程式と資本所得課税 (Farhi&Werning)

- Farhi and Werning[37]
- その他の資本課税モデル: Conesa, Kitao and Krueger[27]、Smyth[114]

5.3 コミットメント制約モデル

- Kehoe and Levine[69][70]
- Alvarez and Jermann[6]
- Lustig[84]

付録 A 数値解析の基礎知識

この補論では、アルゴリズム解説の理解に必要な数値計算について、最小限度の解説を行う。より詳しい解説については Press et al.[100] や Judd[63] を参照してほしい。

A.1 内挿補間 (Interpolation)

関数 f を有限 n 個のパラメーターで近似したい場合、

$$f(x) \approx \hat{f}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x),$$

と表現する事が出来、パラメーター $\{a_i\}$ で近似的される。ここで n は“Degree of Approximation”で、 ϕ は基底 (Basis) と呼ばれる。基底については後述する。

変数は $\{a_i\}_{i=1}^n$ で n 個あるので、 m 本 ($\geq n$) の方程式があれば係数を決定することが出来る ($>$ であれば OLS になる)。内挿ノードとして $\{x_1, \dots, x_m\}$ を取り、各点で $f(x_j)$ を評価する (あるいは既知のデータであるとする)。このデータセットは次を満たす必要がある。

$$\sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x_j) = f(x_j), \text{ for each } j = 1, \dots, m.$$

以上から、

$$\Phi a = y$$

を満たすように a を決定できる。ただし、 Φ の要素は $\Phi_{ij} = \phi_j(x_i)$ である。よって、

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

を解けば、係数が得られる。

1. $m > n$ なら、最小二乗フィッティングとする。すなわち、誤差 $e_i = f(x_j) - \sum a_i \phi_i$ の平方値を最小化するようにする。 $\Rightarrow a = (\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' y$
2. 各 $\{x_j\}$ の偏微係数をデータに入れても可 (Hermite 内挿)。
3. (13) 式の左辺の行列が Ordinary Polynomial なら、Vandermonde 行列になる。当然、 Φ は逆行列が取れるようにする。

A.1.1 Chebyshev 多項式近似

上の ϕ に関しては、直交多項式が良く使われる。直交多項式の中で特に Chebyshev 多項式が非常に便利な性質を持っていることが知られている^{*31}。 $[-1, 1]$ 上の Chebyshev 多項式は次で計算することが出来る。

$$\theta_j(x) \equiv \psi_j(x) = \cos(j \cdot \arccos(x)), \quad j = 0, \dots, m$$

(13) 式より $\Phi a = y$ を解く係数は、

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^m y_j \psi_i(z_j)}{\sum_{j=1}^m \psi_i(z_j)^2}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

を各 $\{a_i\}_{i=0}^{n-1}$ について解けば良い。

- 基底 ψ_j は $j = 0$ から定義される ($\psi_0 = 1$) ので、上の a_i も 0 から定義。

定理 2 (Stone-Weierstrass) f_a を a でパラメタライズした多項式近似とする。このとき、あらゆる $\varepsilon > 0$ について、ある f_a が存在して

$$\|f - f_a\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_a(x)| < \varepsilon$$

を満たす (Weierstrass Theorem)。Stone パート (f が多変数関数) は Judd[63] 参照せよ。

この性質より、スムーズな関数で同じ数のノードを近似する場合、Chebyshev 多項式はスプライン関数よりも精度が高くなる。ただし、非線形性が入った関数などを近似したいときにはスプラインの方が精度が高まる可能性がある。

補間用の評価点 $\{x_1, \dots, x_m\}$ の取り方にもポイントがある。ノードを定義域上で等分にとると、両端の誤差が大きくなることが知られている。基底 ϕ が Chebyshev 多項式なら、次のとり方が効率的な事が知られている。

Chebyshev 補間用ノード

$$z_k = -\cos\left(\frac{2k-1}{2m}\pi\right), \quad k = 1, \dots, m.$$

^{*31} それ以外の直交多項式については、Judd[63]、p.204 参照せよ。

ただし、これは $[-1, 1]$ 区間上なので調整する必要がある。

$$\text{Scale Up: } x_k = (z_k + 1) \left(\frac{b-a}{2} \right) + a, \quad k = 1, \dots, m$$

$$\text{Scale Down: } z_k = \left(2 \frac{x_k - a}{b-a} - 1 \right), \quad k = 1, \dots, m$$

Equioscillation Property (Judd (1998), Theorem 6.5.2) Chebychev 補間用ノードを取って、近似がうまくいっているとき、誤差 $\|f - f_n\|_\infty$ は 0 の近辺で変動する。すなわち、 $\rho_n(f) = \|f(x_j) - f_n^*(x_j)\|_\infty$ となるような関数 f の n 次の一意的な近似 $f_n^*(x)$ が存在して、

$$f(x_j) - f_n^*(x_j) = m(-1)^j \rho_n(f), \quad j = 0, \dots, n+1$$

となる。ただし、 $m = 1$ あるいは $m = -1$ である。

A.1.2 多項式近似

Chebyshev 補間のように定義域上の全てで C^∞ となる 1 つの関数で近似するのではなく、べき乗等のシンプルな関数を組み合わせる場合もある。

A.1.3 線形補間

データ $\{x_j, y_j\}$ が与えられた時、データ間を直線で結んでいく方法は非常に単純であるが、便利な方法である。

$$\hat{f}(x) = y_j + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} (y_{j+1} - y_j), \quad x \in [x_j, x_{j+1}]$$

原始的なように見えるが、Reiter[102] や Krusell and Smith[76] でも使っている。ただし、微分可能なくなる部分が存在する点に注意する必要がある。

A.1.4 3 次のスプライン補間

データ間でスムーズで、かつデータポイント上でも微分可能な関数を考える。 $[a, b]$ 上の関数 $S(x)$ が“Spline of Order n ”であるとは、 $[a, b]$ 上で C^{n-2} 、かつ、ノード $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ の部分区間 $[x_j, x_{j+1}]$ で $n-1$ 次の多項式になっている。

3 次のスプライン (Spline of Order 4) とは、

$$y_i = a_i + b_i x_i + c_i x_i^2 + d_i x_i^3, \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_i = a_{i+1} + b_{i+1} x_i + c_{i+1} x_i^2 + d_{i+1} x_i^3, \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$b_i + 2c_i x_i + 3d_i x_i^2 = b_{i+1} + 2c_{i+1} x_i + 3d_{i+1} x_i^2, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$2c_i + 6d_i x_i = 6d_{i+1} x_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

を満たすように $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ を決めれば、Spline of Order 4 の定義を満たす。上の二つの式は、各ノード上で多項式の値が一致、三番目、四番目の式は各 1 階及び 2 階微分がノード上で一致する条件である。これにより至るところで二階微分可能となる。ただし、真の価値関数が凹関数であったとしてもスプライン近似した関数が凹関数とはならない場合がある点に注意する必要がある。

A.1.5 Schumaker's Shape-Preserving Spline 近似

- スプラインや多項式で近似をすると、真の関数が凹関数であっても、近似後の関数に凹性がなくなる場合がある。凹性は便利な性質で価値関数の計算でも利用できるため、可能であれば残しておきたい。そこで Schumaker's Shape-Preserving Spline という方法がある。

[To Be Completed].

A.2 最適化

[To Be Completed].

A.3 数値積分

[To Be Completed.]

付録 B 動的計画法の理論的特徴付け

B.0.1 動的計画法の基礎知識

Numerical Dynamic Programming を“正しく”使うためには、動的計画法 (Dynamic Programming; DP) の理論的理解が重要である。ここでは、準備として DP の理論的結果をいくつか紹介しておく。動的計画法の基本的文献は Stokey, Lucas with Prescott[115] である。価値関数及び政策関数の微分可能性については Santos and Vigo-Aguiar[109] を参照している。

- k_t, k_{t+1} をこのモデルで内生的に決定される変数とする。 (K, \mathcal{K}) を k の空間とその Borel σ -algebra とし、 (Z, \mathcal{Z}) を外生変数の空間とする ($z_t \in Z$)^{*32}。 (K, \mathcal{K}) 及び (Z, \mathcal{Z}) は可測

^{*32} σ -algebra は集合 A の部分集合 \mathcal{A} の族 (family) で次を満たす。

(i) $\phi, A \in \mathcal{A}$,

空間である。

- $(S, \mathcal{S}) \equiv (K \times Z, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ は状態変数の空間で、可測空間である。所与の z_0 の下で、 t 期にある z が実現する確率 $\Gamma^t(z_0, \cdot)$ が $(Z^t, \mathcal{Z}^t) \equiv (Z \times \cdots \times Z, \mathcal{Z} \times \cdots \times \mathcal{Z})$ 上に定義されている。
- $u(k_t, k_{t+1}, z_t)$ を一期間の Return Function とする。各期の Return は β の率で割り引くとする。また、このモデルは T 期間の離散時間を取り、 $T = \infty$ も含むものとする。

実現可能技術集合 (Feasible Technology Set) を $\Omega \subset K \times K \times Z$ とする。これは連続対応 (Continuous Correspondence) $\Phi : K \times Z \rightarrow K$ のグラフである。例えば、 $k_t, k_{t+1} \in K, z_t \in Z$ とし、予算制約が $k_{t+1} = z_t f(k_t) - c_t$ という形で与えられた時に、 $\Phi(k) = \{k' \in \mathbb{R}_+ \mid z_t f(k_t) - k' \geq 0\}$ が実現可能技術集合である。この表現から明らかなように、Return Function $u(k_t, k_{t+1}, z_t)$ は操作変数 (Control Variable) c_t を使って、 $u(k_t, c_t, z_t)$ と書くことも出来る。

このときモデルの基本的な形は次の通りになる。

$$v^*(k_0, z_0) \equiv \sup_{\{k_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^T \beta^t \int u(k_t, k_{t+1}, z_t) \mu(z_0, z_t), \quad T \leq \infty, \quad (14)$$

$$\text{subject to } \begin{cases} (k_t, k_{t+1}, z_t) \in \Omega, \\ z_{t+1} = \varphi(z_t, \varepsilon_{t+1}), \\ (k_0, z_0) \text{ given. } 0 < \beta < 1, t = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (15)$$

このような形の最適化問題は、頻繁に見かける経済問題の誘導型として一般性を持つ。いくつかの基本的な仮定を置いておく。この仮定は Santos [107] で使われているものである。

仮定 (a): Compactness and Convexity 集合 $K \times Z \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell$ はコンパクト、各 z について集合 $\Omega_z = \{(k, k') \mid (k, k', z) \in \Omega\}$ は凸集合。

仮定 (b): Smoothness and Strong Concavity 写像 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で、定義域の内点で C^2 、有界な一階及び二階偏微係数を持つ。更に、各 z について、ある定数 $\eta > 0$ が存在し、

$$u(k, k', z) + \frac{1}{2} \eta \|k'\|^2,$$

は (k, k') 上の凹関数とする。

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

(iii) $A_n \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Borel σ -algebra は開集合の族によって生成される σ -algebra。

この仮定で要請されている性質は $\alpha_{k'}$ -concavity と呼ばれ、ヘッシアン $D^2u(k, k')$ が負値定符号 (Negative Definite) よりも弱い要請である*³³。

仮定 (c): Interiority $(K \times Z)$ の内点 (k_0, z_0) ではあらゆる最適な $\{k_t, z_t\}_{t \geq 0}$ は

$$(k_t, k_{t+1}, z_t) \in \text{int}(\Omega), \forall t \geq 0.$$

を満たす。

仮定 (d): 関数 $\varphi: Z \times Z \rightarrow Z$ は連続で、各 ϵ について写像 $\varphi(\cdot, \epsilon) \in C^2, D_1\varphi(z, \epsilon), D_{11}\varphi(z, \epsilon)$ は有界かつ Jointly Continuous。更に、非負の関数 $0 \leq \rho < \beta^{-\frac{1}{2}}, C \geq 0$ が存在し、 z_t の z_0 に関する一階、二階偏微分は次の性質を持つ。

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial z_t}{\partial z_0} \right\| &\leq C\rho^t, \\ \left\| \frac{\partial^2 z_t}{\partial z_0^2} \right\| &\leq C\rho^t \quad \text{for each } t > 0. \end{aligned}$$

この条件は確率過程の漸近的な成長が制限されていることを意味しており、一次及び二次のモーメントが有界なら通常満たされる仮定である*³⁴。

(14)、(15) は次のベルマン方程式を満たすことが知られている。

$$\begin{aligned} v(k_0, z_0) &= \max_{k' \in K} \left\{ u(k, k', z) + \beta \int_Z v(k', z') Q(z, z') \right\}, \\ &\text{subject to } (k_t, k_{t+1}, z_t) \in \Omega. \end{aligned}$$

問題をベルマン方程式で表現したことによって、無限個の変数の問題を汎関数方程式 (Functional Equation) の問題に変換できたことになる。もし $v(\cdot)$ の性質が分かっていたら、求めるのは政策関数

$$k' = g(k, z),$$

によって生成されるマルコフ過程 $\{k_t, z_t\}_{t \geq 0}$ となる。そのため、このような問題は Markov Decision Problem(MDP) とも呼ばれる*³⁵。

最適性原理 (Principle of Optimality): $v(k_0, z_0) = v^*(k_0, z_0) = E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(k_t, k_{t+1}, z_t)$ *³⁶。

*³³ 詳しくは、Santos[107] の p.314 参照せよ。

*³⁴ $\left\| \frac{\partial}{\partial z_0} \varphi[\varphi(\cdots(\varphi(z_0, \epsilon_1), \epsilon_2) \cdots), \epsilon_t] \right\| \leq C\rho^t, \left\| \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \varphi[\varphi(\cdots(\varphi(z_0, \epsilon_1), \epsilon_2) \cdots), \epsilon_t] \right\| \leq C\rho^t$ だから、上の条件は初期値 z_0 の変化でどれくらい確率過程が変化するかを表している。

*³⁵ MDP については Rust[104] を参照せよ。

*³⁶ SLP[115] の p.67 を参照せよ。

定理 3 $v(k_0, z_0)$ は k_0 に関して凹関数。

証明. 仮定 2 より Return Function $u(k, k', z)$ は凹関数である。凹関数の線形結合は凹関数。Principle of Optimality より $v = v^*$ だから、 $v(k_0, z_0)$ は凹関数。■

\mathcal{V} を状態空間 $(K \times Z)$ 上で定義された関数 v の集合とする。ただし、 v は有界な連続関数とする。 \mathcal{V} におけるノルムを $\|v\| = \max_{\{k, z\} \in K \times Z} |v(k, z)|$ で定義し、 $\mathcal{V}(S)$ は Banach 空間とする。

定義 1 ベルマン・オペレータを次で定義する:

$$T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

$$T(v)(k_0, z_0) = \max_{k'} \left\{ u(k, k', z) + \beta \int_Z v(k', z') Q(k'|z, z') \right\}$$

$$\text{subject to } (k_t, k_{t+1}, z_t) \in \Omega, \text{ for } v \in \mathcal{V}.$$

次の性質は良く知られた縮小写像の性質である。

定理 4 $v_n = T^n v_0$ とする。 T は \mathcal{V} 上の縮小写像である。即ち、

$$\|Tv_0\| \leq \beta \|v_0 - v_1\|, v_0, v_1 \in \mathcal{V}.$$

W を T の一意的な不動点とする。このとき次が成立する。

$$\|W - v_n\| \leq \beta^n \|W - v_0\|.$$

この性質があるおかげで、うまく価値関数を近似出来ていれば、真の解に収束する見込みが得られる。近似誤差の計算にもこの関係を利用する。

B.1 価値関数と政策関数の微分可能性

価値関数の微分可能性については、Benveniste and Scheinkman[10] 以来、ある緩やかな条件下では一階微分が可能であることが知られている。Santos and Vigo[109] は二階微分可能性について分析している。また、彼らの定理の系として、陰関数定理を使って、政策関数の一階微分可能性についても導き出すことが出来る。

定理 5 (Santos and Vigo (1998)) 仮定 (a)-(d) が成立するとする。このとき、価値関数 v は $\text{int}(K \times Z)$ 上で C^2 写像になる。

系 2 仮定 (a)-(d) が成立するとする。このとき、政策関数 g は $\text{int}(K \times Z)$ 上で C^1 写像になる。

価値関数が C^3 とならない反例が存在しているため、これ以上の微分可能性を要請するにはもっと仮定を強くしないといけない。この定理と系から、微分可能性を利用したアルゴリズムやモデル設定が可能になる。

付録 C AR(1) 過程を近似する

この補論では、Tauchen[117] による AR(1) 過程を状態数が有限個のマルコフ環で近似する方法を解説する。Tauchen[117] はより一般的な VAR の近似方法についても言及しているが、ここでは 1 変数で AR(1) のケースのみを考えることにする。この近似方法は Aiyagari (1994) 等によって労働保有量過程を近似するために用いられており、Tauchen and Hussey[118] によって資産価格論などにも応用されている。

C.1 基本的なアイディア

まず、Tauchen[117] による基本的なアイディアを解説する。ある変数 d_t の対数が AR(1) に従うとしよう。 $y_t = \log d_t$ としたときに y_t は

$$y_t = \lambda y_{t-1} + \tilde{\varepsilon}_t \quad (16)$$

に従う^{*37}。但し、 $\tilde{\varepsilon}_t$ は平均 0 で分散が σ_ε^2 の正規分布に従うとする (i.e. $\tilde{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$)。 $F(\cdot)$ を $\tilde{\varepsilon}_t$ の分布関数としたとき、 $\Pr[\tilde{\varepsilon}_t \leq d] = F\left(\frac{d}{\sigma_\varepsilon}\right)$ となる。

第 1 ステップとして、連続的に $(-\infty, \infty)$ の区間の様々な値を取る y_t を N 個 $\bar{y}^1 < \dots < \bar{y}^N$ に離散化する。離散化された状態空間を $\tilde{y}_t \in Y^{\log} = \{\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^N\}$ と書く事にする。では、 \bar{y}^i をどうやって決めれば良いのか。まず、 \bar{y}^N を y に関する標準誤差 $\sigma_y = \left[\frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\lambda^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$ を m 倍した値とする^{*38*39}。そして、 $\bar{y}^1 = -\bar{y}^N$ として、残りの値を $[\bar{y}^1, \bar{y}^N]$ を等分する。

次に、現在の状態が i の時に次期に j に推移する確率 $\pi_{ij} = \Pr[\tilde{y}_t = \bar{y}^j | \tilde{y}_{t-1} = \bar{y}^i]$ を計算しよ

*37 同じことであるが、

$$\ln d_t = \lambda \ln d_{t-1} + \sigma_y (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_t$$

と書く事も出来る。ただし、 ε_t は平均 0、分散 1 の正規分布に従うと仮定する。 $\sigma_\varepsilon = \sigma_y \sqrt{1 - \lambda^2}$ であり、 $\text{var}(\ln y_t) = \sigma_y^2$ である。

*38 \bar{y} を y の平均とする。このとき、 $y_t - \bar{y} = \lambda(y_{t-1} - \bar{y}) + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})$ を 2 乗すると、 $(y_t - \bar{y})^2 = \lambda^2(y_{t-1} - \bar{y})^2 + \text{cov}(y_{t-1}, \varepsilon_t) + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2$ である。 $\text{cov}(y_{t-1}, \varepsilon_t) = 0$ から、 $\sigma_y^2 = \lambda^2 \sigma_y^2 + \sigma_\varepsilon^2$ である。よって、 $(1 - \lambda^2) \sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2$ 。

*39 Tauchen (1986) は $m = 3$ としている。多くの先行研究で m は 3 あるいは 4 が用いられる。

う。各状態の間隔を $w = \bar{y}^k - \bar{y}^{k-1}$ とする。各 i について、もし $j \in [2, N-1]$ ならば、

$$\begin{aligned}\pi_{ij} &= \Pr \left[\bar{y}^j - \frac{w}{2} \leq \bar{y}^j \leq \bar{y}^j + \frac{w}{2} \right] \\ &= \Pr \left[\bar{y}^j - \frac{w}{2} \leq \lambda \bar{y}^i + \varepsilon_t \leq \bar{y}^j + \frac{w}{2} \right] \\ &= F \left(\frac{\bar{y}^j - \lambda \bar{y}^i + \frac{w}{2}}{\sigma_\varepsilon} \right) - F \left(\frac{\bar{y}^j - \lambda \bar{y}^i - \frac{w}{2}}{\sigma_\varepsilon} \right)\end{aligned}\quad (17)$$

が推移確率である。 \bar{y}^i を中心とした間隔 $\frac{w}{2}$ の区間に \bar{y}^j が入る確率を累積分布の差を使って計算すれば良い。もし $j = 1, N$ ならば、

$$\pi_{i1} = F \left(\frac{\bar{y}^1 - \lambda \bar{y}^i + \frac{w}{2}}{\sigma_\varepsilon} \right), \quad \pi_{iN} = 1 - F \left(\frac{\bar{y}^N - \lambda \bar{y}^i - \frac{w}{2}}{\sigma_\varepsilon} \right)$$

となる。

AR(1) の係数は

$$\lambda = \frac{\text{cov}(\log d_t, \log d_{t-1})}{\text{var}(\log d_t)}, \quad \sigma_\varepsilon = \sqrt{\text{var}(\log d_t)}$$

で求める。

C.2 より具体的には

(16) 式を

$$\log d_t = \lambda \log d_{t-1} + \sigma_y (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

という形に書き換えよう。脚注より $\sigma_y (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} = \sigma_\varepsilon$ であるから、この変換によって y_t の分散は変化しない。

F が正規分布に従う時に、Tauchen の方法をより具体的に計算してみよう。状態の数が $N = 7$ で $m = 3$ とすると、 $\bar{y}^N = 3\sigma_y$ 、 $\bar{y}^1 = -3\sigma_y$ で状態空間は $Y^{\log} = \{-3\sigma_y, -2\sigma_y, -\sigma_y, 0, \sigma_y, 2\sigma_y, 3\sigma_y\}$

となり、状態の幅は $w = \sigma_y$ である。7つの区間は次のように定義できる。

$$\begin{aligned} I_1 &= [3\sigma_y, \frac{5}{2}\sigma_y) \\ I_2 &= [-\frac{5}{2}\sigma_y, -\frac{3}{2}\sigma_y) \\ I_3 &= [-\frac{3}{2}\sigma_y, -\frac{1}{2}\sigma_y) \\ I_4 &= [-\frac{1}{2}\sigma_y, \frac{1}{2}\sigma_y) \\ I_5 &= [\frac{1}{2}\sigma_y, \frac{3}{2}\sigma_y) \\ I_6 &= [\frac{3}{2}\sigma_y, \frac{5}{2}\sigma_y) \\ I_7 &= [\frac{5}{2}\sigma_y, 3\sigma_y) \end{aligned}$$

I_1 と I_7 を除いた各区間の中間点是对数を取った状態値である。

累積密度関数 $F(\cdot)$ が正規分布に従うとき、現在、ある状態 $\bar{y}^i = \log d \in Y^{\log}$ が実現していて、次期に $\bar{y}^j = \log d' \in Y^{\log}$ が実現する確率は

$$\pi_{ij} = \Pr(\log d' = \bar{y}^j | \log d = \bar{y}^i) = \int_{I_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \log \bar{d})^2}{\sigma_\varepsilon^2}} dx \quad (18)$$

となる^{*40}。(18)式は平均 $\log d$ 、分散 σ_ε の正規分布を区間 I_j 上で積分したもので、(17)式に対応する。

最後に対数を取っていた AR(1) 過程 $\{\log d_t\}$ を $\{d_t\}$ に戻し、計算のし易さのための基準化する。まず、対数での状態空間 $Y^{\log} = \{-3\sigma_y, -2\sigma_y, -\sigma_y, 0, \sigma_y, 2\sigma_y, 3\sigma_y\}$ を指数を取って元に戻そう。即ち、 $Y^{\exp} = \{e^{-3\sigma_y}, \dots, e^{3\sigma_y}\}$ が $\{d\}$ に関する状態空間である。次に期待値 $N = \sum_{d \in D} d\pi_\infty(d)$ が 1 になるように Y^{\exp} を基準化しよう。 $\pi_\infty(d)$ を $[\pi_{ij}] = \Pi$ の定常分布とする。 N で基準化すると、

$$\begin{aligned} E &= \{d_1, \dots, d_7\} \\ &= \left\{ \frac{e^{-3\sigma_y}}{N}, \frac{e^{-2\sigma_y}}{N}, \frac{e^{-\sigma_y}}{N}, \frac{1}{N}, \frac{e^{\sigma_y}}{N}, \frac{e^{2\sigma_y}}{N}, \frac{e^{3\sigma_y}}{N} \right\} \end{aligned}$$

が最終的に得られた、 $N = 7$ 時のマルコフ環の取りうる値である。

C.3 Tauchen 法と近似誤差

Tauchen 法は AR(1) 過程を近似する便利な方法であるが、近似精度に関して問題も指摘されている。Floden[43] は、ショックの持続性パラメータである λ が 1 に近い場合、ノードの数を 15

^{*40} データを基準化していれば、 $\log \bar{d} = 0$ になる。そうでなければ、 $\log \bar{d}$ を明示的に導出する必要がある。

個程度にしないと精度が落ちることを指摘している。Floden[43] で使用された Tauchen[117][118] 法に関しては、HP でコードを置いてくれている。

- Floden[43]: <http://www2.hhs.se/personal/floden/>

参考文献

- [1] Adda, J. and R. Cooper (2003): “Dynamic Economics,” *The MIT Press*.
- [2] Aiyagari, S.R. (1994): “Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving,” *Quarterly Journal of Economics*, 109, 659-684.
- [3] Aiyagari, S.R. and E.R. McGrattan (1998): “The Optimum Quantity of Debt,” *Journal of Monetary Economics*, 42, 447-469.
- [4] Algon, Y., O. Allais, and W.J. den Haan (2007): “Solving Heterogeneous-Agent Models with Parametrized Cross-Sectional Distributions,” forthcoming *Journal of Economic Dynamics and Controls*.
- [5] Alvarez, F. and N.J. Stokey (1998): “Dynamic Programming with Homogeneous Functions,” *Journal of Economic Theory*, 82, 167-189.
- [6] Alvarez, F. and U.J. Jermann (2000): “Efficiency, Equilibrium, and Asset Pricing with Risk of Default,” *Econometrica*, 68, 775-797.
- [7] Aruoba, S.B., J. Fernández-Villaverde, and J.F. Rubio-Ramírez (2003): “Comparing Solution Methods for Dynamic Equilibrium Economies,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30, 2447-2508.
- [8] Atkinson, K.E. (1989): “An Introduction to Numerical Analysis,” *John Wiley and Sons*.
- [9] Benitez-Silva, H., G. Hall, G.J. Hitsch, G. Pauletto, and J. Rust (2000): “A Comparison of Discrete and Parametric Approximation Methods for Continuous-State Dynamic Programming Problems,” *mimeo*, Yale University.
- [10] Benveniste, L.M. and J.A. Scheinkman (1979): “On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Models of Economics,” *Econometrica*, 47, 727-732.
- [11] Bewley, T.F. (1977): “The Permanent Income Hypothesis: A Theoretical Formulation,” *Journal of Economic Theory*, 16, 252-292.
- [12] Bewley, T.F. (1980a): “The Optimum Quantity of Money,” in J.H. Kareken and N. Wallace (eds.), *Models of Monetary Economies*, Federal Reserve Bank of Minneapolis, Minneapolis.
- [13] Bewley, T.F. (1980b): “The Permanent Income Hypothesis and Long-Run Economic Stability,” *Journal of Economic Theory*, 22, 377-394.

-
- [14] Bewley, T.F. (1986): “Stationary Monetary Equilibrium with a Continuum of Independently Fluctuating Consumers,” in W. Hildenbrand and A. Mas-Colell (eds.), *Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gerard Debreu*, North-Holland.
- [15] Blanchard, O.J. and C.M. Kahn (1980): “The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations,” *Econometrica*, 48, 1305-1311.
- [16] Bona, J.L., and M.S. Santos (1997): “On the Role of Computation in Economic Theory,” *Journal of Economic Theory*, 72, 241-281.
- [17] Browning, M., L.P. Hansen, and J.J. Heckman (1999): “Micro Data and General Equilibrium Models,” in J.B. Taylor and M. Woodford (eds.), *Handbook of Macroeconomics Vol. I*, North-Holland.
- [18] Burnside, C. (1999): “Real Business Cycle Models: Linear Approximation and GMM Estimation,” *mimeo*, The World Bank.
- [19] Campbell, J.R. (1998): “Entry, Exit, Embodied Technology, and Business Cycles,” *Review of Economic Dynamics*, 1, 371-408.
- [20] Carroll, C.D. (2006): “The Method of Endogenous Gridpoints for Solving Dynamic Stochastic Optimization Problems,” *Economics Letters*, 91, 312-320.
- [21] Chamberlain, G. and C.A. Wilson (2000): “Optimal Intertemporal Consumption under Uncertainty,” *Review of Economic Dynamics*, 3, 365-395.
- [22] Chapman, S.J. (2007): “Fortran 95/2003 for Scientists and Engineers,” *McGraw-Hill*.
- [23] Chatterjee, S., D. Corbae, M. Nakajima, and J.V. Ríos-Rull (2007), “A Quantitative Theory of Unsecured Consumer Credit with Risk of Default,” *Econometrica*, 75, 1525-1589.
- [24] Christiano, L.J. and J.D.M. Fisher (2000): “Algorithms for Solving Dynamic Models with Occasionally Binding Constraints,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, 1179-1232.
- [25] Cole, H. and N. Kocherlakota (2001): “Efficient Allocations with Hidden Income and Hidden Strage,” *Review of Economic Studies*, 68, 523-542.
- [26] Conesa, J.C. and D. Krueger (2005): “On the Optimal Progressivity of the Income Tax Code” *Journal of Monetary Economics*, 53, 1425-1450.
- [27] Conesa, J.C., S. Kitao, and D. Krueger (2008): “Taxing Capital? Not a Bad Idea After All!” forthcoming *American Economic Review*.

- [28] Cooley, T. (1995): “Frontiers of Business Cycle Research,” *Princeton University Press*.
- [29] den Haan, W.J. (1997): “Solving Dynamic Models with Aggregate Shocks and Heterogeneous Agents,” *Macroeconomic Dynamics*, 1, 355-386.
- [30] den Haan, W.J. (2001): “The Importance of the Number of Different Agents in a Heterogeneous Asset-Pricing Model,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, 721-746.
- [31] den Haan, W.J. (2007): “Assessing the Accuracy of the Aggregate Law of Motion in Models with Heterogeneous Agents,” *mimeo*, University of Amsterdam.
- [32] den Haan, W., K.L. Judd, and M. Juillard (2005): “Comparing Numerical Solutions of Models with Heterogeneous Agents,” *mimeo*, University of California at San Diego.
- [33] den Haan, W.J., and A. Marcet (1994), “Accuracy in Simulations,” *Review of Economic Studies*, 61, 3-17.
- [34] den Haan, W.J. and P. Rendahl (2008): “Solving the Incomplete Markets Model with Aggregate Uncertainty using Explicit Aggregation,” *mimeo*, University of Amsterdam.
- [35] Doepke, M. and R.M. Townsend (2005): “Dynamic Mechanism Design with Hidden Income and Hidden Actions” *Journal of Economic Theory*, 126, 235-258.
- [36] Duffie, D., J. Geanakoplos, A. Mas-Colell, and A. McLennan (1994): “Stationary Markov Equilibria,” *Econometrica*, 62, 745-781.
- [37] Farhi, E. and I. Werning (2006): “Capital Taxation: Quantitative Explorations of the Inverse Euler Equation” *mimeo*, Massachusetts Institute of Technology.
- [38] Feldman, M. and C. Gilles (1985): “An Expository Note on Individual Risk without Aggregate Uncertainty,” *Journal of Economic Theory*, 35, 26-32.
- [39] Fernandes, A. and C. Phelan (2000): “A Recursive Formulatin for Repeated Agency with History Dependence” *Journal of Economic Theory*, 91, 223-247.
- [40] Fernández-Villaverde, J. and J.F. Rubio-Ramírez (2004): “Comparing Dynamic Equilibrium Models to Data: A Baysian Approach,” *Journal of Econometrics*, 123, 153-187.
- [41] Fernández-Villaverde, J. and J.F. Rubio-Ramírez (2006): “Estimating Macroeconomic Models: A Likelihood Approach,” forthcoming *Review of Economic Studies*.
- [42] Fernández-Villaverde, J. and J.F. Rubio-Ramírez (2007): “How Structural Are Structural Parameters?” *NBER Macroeconomics Annual 2007*, MIT Press.
- [43] Floden, M. (2008), “A Note on the Accuracy of Markov-Chain Approximations to Highly Persistent AR(1)-Process,” *Economics Letters*, 99, 516-520.

- [44] Gasper, J. and K.L. Judd (1993): "Solving Large-Scale Rational-Expectations Models," *Macroeconomic Dynamics*, 1, 45-75.
- [45] Gourinchas, P.O. (2000): "Precautionary Savings, Life Cycle and Macroeconomics," *mimeo*, Princeton University.
- [46] Hansen, G.D. and A. İmrohorođlu (1992): "The Role of Unemployment Insurance in an Economy with Liquidity Constraints and Moral Hazard," *Journal of Political Economy*, 100, 118-142.
- [47] Hansen, L.P., and J.J. Heckman (1996): "The Empirical Foundations of Calibration," *Journal of Economic Perspectives*, 10, 87-104.
- [48] Hansen, L.P. and T.J. Sargent (1996): "Recursive Linear Models of Dynamic Economies," *mimeographic book*, University of Chicago.
- [49] Hayashi, F. and E.C. Prescott (2002): "The 1990s in Japan: A Lost Decade," *Review of Economic Dynamics*, 5, 206-235.
- [50] Heathcote, J. (2005): "Fiscal Policy with Heterogeneous Agents and Incomplete Markets," *Review of Economic Studies*, 72, 161-188.
- [51] Hong, J., J. Davila, P. Krusell, and J.V. Rios-Rull (2007): "Constrained Efficiency in the Neoclassical Growth Model with Uninsurable Idiosyncratic Risks," *mimeo*, University of Pennsylvania.
- [52] Hopenhayn, H. and E.C. Prescott (1992): "Stochastic Monotonicity and Stationary Distributions for Dynamic Economies," *Econometrica*, 60, 1387-1406.
- [53] Huggett, M. (1993): "The Risk-Free Rate in Heterogeneous-Agent Incomplete-Insurance Economies," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17, 953-969.
- [54] Huggett, M. (1996): "Wealth Distribution in Life-Cycle Economies," *Journal of Monetary Economics*, 38, 469-494.
- [55] Huggett, M. (1997): "The One-Sector Growth Model with Idiosyncratic Shocks: Steady States and Dynamics," *Journal of Monetary Economics*, 39, 385-403.
- [56] Huggett, M. and S. Ospina (2001): "Aggregate Precautionary Savings: When is the Third Derivative Irrelevant?" *Journal of Monetary Economics*, 48, 373-396.
- [57] İmrohorođlu, A. (1989): "Cost of Business Cycles with Indivisibilities and Liquidity Constraints," *Journal of Political Economy*, 97, 1364-1383.
- [58] İmrohorođlu, A., S. İmrohorođlu and D.H. Joines (1995): "A Life Cycle Analysis of

- Social Security,” *Economic Theory*, 6, 83-114.
- [59] Johnson, S.A., J.R. Stedinger, C.A. Shoemaker, Y. Li, and J.A. Tejada-Guibert (1993): “Numerical Solution of Continuous-State Dynamic Programs using Linear and Spline Interpolation,” *Operations Research*, 41, 484-500.
- [60] Judd, K.L. (1985): “The Law of Large Numbers with a Continuum of I.I.D. Random Variables,” *Journal of Economic Theory*, 35, 19-25
- [61] Judd, K.L. (1992): “Projection Methods for Solving Aggregate Growth Models,” *Journal of Economic Theory*, 58, 410-452.
- [62] Judd, K.L. (1997): “Computational Economics and Economic Theory: Substitutes or Complements?” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 907-942.
- [63] Judd, K.L. (1998): “Numerical Methods in Economics,” *The MIT Press*.
- [64] Judd, K.L. and S.M. Guu (1993): “Perturbation Solution Methods for Economic Growth Model,” in H. Varian (ed.), *Economic and Financial Modelling in Mathematica*, Springer, New York.
- [65] Judd, K.L., F. Kubler, and K. Schmedders (2000): “Computing Equilibria in Infinite Horizon Finance Economies: The Case of One Asset,” *Journal of Economic Dynamics and Controls*, 24, 1047-1078.
- [66] Judd, K.L., F. Kubler, and K. Schmedders (2003): “Computational Methods for Dynamic Equilibria with Heterogeneous Agents,” in M. Dewatripont, L. P. Hansen and S. J. Turnovsky (eds.), *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, Eighth World Congress*, Cambridge University Press.
- [67] Judd, K.L. and A. Solnick (1994): “Numerical Dynamic Programming with Shape-Preserving Splines,” *mimeo*, Stanford University.
- [68] Juillard, M. (1996): “DYNARE: A Program for the Resolution and Simulation of Dynamic Models with Forward Variables through the use of a Relaxation Algorithm,” *CEPREMAP No: 9602*.
- [69] Kehoe, T.J. and D.K. Levine (1993): “Debt-Constrained Asset Markets,” *Review of Economic Studies*, 60, 865-888.
- [70] Kehoe, T.J. and D.K. Levine (2001): “Liquidity Constrained Markets versus Debt Constrained Markets,” *Econometrica*, 69, 575-598.
- [71] King, R.G., C.I. Plosser, and S.T. Rebelo (2001): “Production, Growth and Business

- Cycles: Technical Appendix,” *Computational Economics*, 20, 87-116.
- [72] Krueger, D. and F. Kubler (2004): “Computing Equilibrium in OLG Models with Stochastic Production,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, 1411-1436.
- [73] Krueger, D. and F. Perri (2005): “Does Income Inequality Lead to Consumption Inequality? Empirical Findings and a Theoretical Explanation,” *Review of Economic Studies*, 73, 163-193.
- [74] Krusell, P., T. Mukoyama and A. Şahin (2007): “Labor-Market Matching with Precautionary Savings and Aggregate Fluctuations,” *mimeo*, Princeton University.
- [75] Krusell, P. and A.A. Smith Jr. (1997): “Income and Wealth Heterogeneity, Portfolio Choice, and Equilibrium Asset Returns,” *Macroeconomic Dynamics*, 1, 387-422.
- [76] Krusell, P. and A.A. Smith Jr. (1998): “Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy,” *Journal of Political Economy*, 106, 867-896.
- [77] Krusell, P. and A.A. Smith Jr. (1999): “On the Welfare Effects of Eliminating Business Cycle,” *Review of Economic Dynamics*, 2, 245-272.
- [78] Krusell, P. and A.A. Smith Jr. (2002): “Revising the Welfare Effects of Eliminating Business Cycle,” *mimeo*, Yale University.
- [79] Krusell, P. and A.A. Smith Jr. (2006): “Quantitative Macroeconomic Models with Heterogeneous Agents,” *Econometric Society World Congress Meetings*.
- [80] Kubler, F. (2007): “Approximate Generalizations and Computational Experiments,” *Econometrica*, 75, 967-992.
- [81] Kubler, F. and K. Schmerrers (2005): “Stationary Equilibria in Asset Pricing Models with Incomplete Market and Collateral,” *Econometrica*, 71, 1767-1793.
- [82] Kubler, F. and K. Schmerrers (2005): “Approximate Versus Exact Equilibria in Dynamic Economies,” *Econometrica*, 73, 1205-235.
- [83] Ljungqvist, L. and T.J. Sargent (2004): “Recursive Macroeconomics,” *MIT Press*.
- [84] Lustig, H. (2005): “The Market Price of Aggregate Risk and the Wealth Distribution,” *NBER Working Paper Series*, No. 11132.
- [85] Malin, B., D. Krueger, and F. Kubler (2007): “Computing Stochastic Dynamic Economic Models with a Large Number of State Variables: A Description and Application of a Smolyak-Collocation Method,” *mimeo*, University of Pennsylvania.
- [86] Marcet, A. and R. Marimon (1999), “Recursive Contracts,” *mimeo*, Universitat Pompeu

- Fabra.
- [87] Marcet, A., F. Obiols-Homs, and P. Weil (2007), “Incomplete Markets, Labor Supply and Capital Accumulation,” *Journal of Monetary Economics*, 54, 2621-2635.
- [88] Marimon, R. and A. Scott (1999): “Computational Methods for the Study of Dynamic Economies,” *Oxford University Press*.
- [89] McGrattan, E.R. (1996): “Solving the Stochastic Growth Model with a Finite Element Method,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 20, 19-42.
- [90] McGrattan, E.R. (1999): “Application of Weighted Residual Methods to Dynamic Economic Models” in R. Marimon and A. Scott.
- [91] Messner, M. and N. Pavoni (2004): “On the Recursive Saddle Point Method,” *mimeo*, University College London.
- [92] Metcalf, M., J. Reid, and M. Cohen (2004): “Fortran 95/2003 Explained,” *Oxford University Press*.
- [93] Miao, J. (2006): “Competitive Equilibria of Economies with a Continuum of Consumers and Aggregate Shocks,” *Journal of Economic Theory*, 128, 274-298.
- [94] Miao, J. and M. Santos (2005): “Existence and Computation of Markov Equilibria for Dynamic Non-Optimal Economies,” *mimeo*, Boston University.
- [95] Miranda, M.J. and P.L. Fackler (2002): “Applied Computational Economics and Finance,” *The MIT Press*.
- [96] Mukoyama, T. and A. Şahin (2005): “The Cost of Business Cycles for Unskilled Workers,” *Federal Reserve Bank of New York Staff Report*, No. 214.
- [97] Paulson, A., R. Townsend, and A. Karaivanov (2006): “Distinguishing Limited Commitment from Moral Hazard in Models of Growth and Inequality” *Journal of Political Economy*, 114, 100-44.
- [98] Phelan, C. and A. Skrzypacz (2006): “Sequential Equilibria with Infinite Histories”, *mimeo*, FRB of Minneapolis.
- [99] Phelan, C. and R. Townsend (1991): “Computing Multi-Period, Informatoin-Constrained Optima,” *Review of Economic Studies*, 58, 853-881.
- [100] Press, W.H., B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling (1992): “Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing (2nd edn.),” *Cambridge University Press*, Cambridge.

- [101] Quarteroni, A., R. Sacco, and F. Saleri (2000): “Numerical Mathematics,” *Texts in Applied Mathematics 37*, Springer.
- [102] Reiter, M. (2002): “Recursive Computation of Heterogeneous Agent Models,” *mimeo*, Universitat Pompeu Fabra.
- [103] Reiter, M. (2008): “Solving Heterogeneous-Agent Models by Projection and Perturbation,” *mimeo*, Universitat Pompeu Fabra.
- [104] Rust, J. (1996): “Numerical Dynamic Programming in Economics,” in H. Amman, D. Kendrick and J. Rust (eds.), *Handbook of Computational Economics Vol.I*, North-Holland.
- [105] Rust, J. (1997): “Using Randomization to Break the Curse of Dimensionality,” *Econometrica*, 65, 487-516.
- [106] Santos, M.S. (1991): “Smoothness of the Policy Function in Discrete Time Economic Models,” *Econometrica*, 59, 1365-1382.
- [107] Santos, M.S. (1999): “Numerical Solution of Dynamic Economic Models,” in J.B. Taylor and M. Woodford (eds.), *Handbook of Macroeconomics Vol.I*, North-Holland.
- [108] Santos, M.S. (2000): “Accuracy of Numerical Solutions using the Euler Equation Residuals,” *Econometrica*, 68, 1377-1402.
- [109] Santos, M.S. and J. Vigo-Aguiar (1998): “Analysis of a Numerical Dynamic Programming Algorithm Applied to Economic Models,” *Econometrica*, 66, 409-426.
- [110] Santos, M.S. and A. Peralta-Alva (2003): “Accuracy of Simulations for Stochastic Dynamic Models,” *mimeo*, Arizona State University.
- [111] Schmitt-Grohé, S. and M. Uribe (2005): “Solving Dynamic General Equilibrium Models Using a Second-Order Approximation to the Policy Function,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, 755-775.
- [112] Sims, C. (2000): “Second Order Accurate Solution of Discrete Time Dynamic Equilibrium Models,” *mimeo*, Princeton University.
- [113] Sims, C. (2001): “Solving Linear Rational Expectations Models,” *Computational Economics*, 20, 1-20.
- [114] Smyth, S. (2005): “A Balancing Act: Optimal Nonlinear Taxation in Overlapping Generations Models” *mimeo*, Harvard University.
- [115] Stokey, N.L. and R.E. Lucas Jr. with E.C. Prescott (1989): “Recursive Methods in

- Economic Dynamics,” *Harvard University Press*.
- [116] Storesletten, K., C.I. Telmer, and A. Yaron (2007): “Asset Pricing with Idiosyncratic Risk and Overlapping Generations,” *Review of Economic Dynamics*, 10, 519-548.
- [117] Tauchen, G. (1986), “Finite State Markov-Chain Approximations to Univariate and Vector Autoregressions,” *Economics Letters*, 20, 177-181.
- [118] Tauchen, G. and R. Hussey (1991), “Quadrature-Based Methods for Obtaining Approximate Solutions to Nonlinear Asset Pricing Models,” *Econometrica*, 59, 371-396.
- [119] Taylor, J.B. and H. Uhlig (1990): “Solving Nonlinear Stochastic Growth Models: A Comparison of Alternative Solution Methods,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 1-17.
- [120] Young, E.R. (2005): “Approximate Aggregation,” *mimeo*, Florida State University.
- [121] 牛島省 (2006): 「Open MP による並列プログラミングと数値計算法」丸善株式会社
- [122] 牛島省 (2007): 「数値計算のための Fortran 90/95 プログラミング入門」森北出版株式会社
- [123] 上坂良則 (2000): 「MATLAB プログラミング入門」牧野書店
- [124] 上坂良則 (2006): 「MATLAB+Scilab プログラミング辞典」Softbank Creative
- [125] 北本卓也 (2002): 「Octave を用いた数値計算入門」ピアソン・エデュケーション
- [126] 櫻井鉄也 (2003): 「MATLAB/Scilab で理解する数値計算」東京大学出版会
- [127] 中山茂 (2007): 「Fortress 言語」技術堂出版
- [128] 前橋和哉 (2004): 「センス・オブ・プログラミング」技術評論社
- [129] 水島二郎・柳瀬眞一郎 (2002): 「理工学のための数値計算法」数理工学社
- [130] 安田絹子・小林林広・飯塚博道・阿部貴之・青柳信吾 (2006): 「マルチコア CPU のための並列プログラミング 並列処理& マルチスレッド入門」秀和システム
- [131] Goodliffe, P.[著]、(株) トップスタジオ [訳](2007): 「コード・クラフト」毎日コミュニケーションズ