

新古典派経済成長モデル

山田 知明

明治大学 商学部

#1

モデルの設定

なぜソローモデルを学ぶか

現代成長理論の出発点

- Robert Solow (1956)：ノーベル経済学賞を受賞 (1987 年)
 - Solow (1956) “A Contribution to the Theory of Economic Growth,” *Quarterly Journal of Economics*, 70(1), pp.65-94.
- 今日の経済成長理論・開発経済学の「ベースライン」モデル
- シンプルだが、多くの実証的予測が支持されている

3つの問い

1. **水準**：なぜ国によって所得水準が異なるのか？
2. **成長**：長期的な成長の源泉は何か？
3. **収束**：貧しい国は豊かな国に追いつくか？

ソローモデルの主要なメッセージ

定常状態への収束

長期成長の源泉は**技術進歩**（ただしモデル内では「外生」）

新古典派経済成長モデル

- 記法の約束事
 - t 年における変数 X の値を X_t と書くことにする
- 資源制約: $C_t + I_t + G_t + NX_t = Y_t$
 - 政府部門と海外部門 (赤字部分) を無視
- 貯蓄 S_t は GDP の一定割合 (s) であると仮定

$$S_t = sY_t$$

- 資本ストック K_t は、
 1. 投資 I_t によって増加する
 - 投資 I_t は貯蓄 S_t に等しい
 2. 固定資本減耗率 δ によって減少する

生産関数

集計的生産関数（Cobb-Douglas 型）

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

- Y ：実質 GDP（産出量）
- K ：物的資本
- L ：労働投入（人口成長率 n で成長）
- A ：技術水準（技術進歩率 g で成長）
 - 技術は労働節約的に進歩：Harrod 中立的
 - Slow 中立的 $\Rightarrow Y = F(AK, L)$ 、Hicks 中立的 $\Rightarrow Y = AF(K, L)$

重要な性質（後ほど、数値例で確認）

- 規模収穫一定：生産要素を 2 倍にすれば産出も 2 倍
- 資本の限界生産物逓減： $F_K(K, L) > 0$ 、 $F_{KK}(K, L) < 0$

資本蓄積方程式

「効率単位」 当たりの変数に変換する：一人当たり × 技術水準

$$k \equiv \frac{K}{AL}, \quad y \equiv \frac{Y}{AL} = f(k) = k^\alpha$$

資本蓄積に関する式（効率単位当たり）

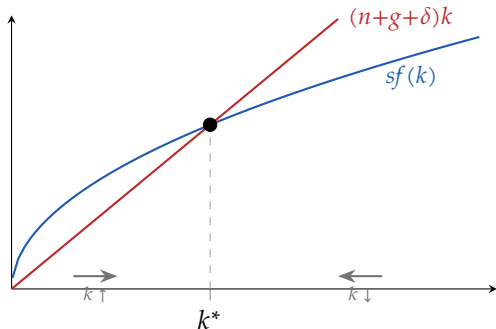
$$\dot{k} = sf(k) - (n + g + \delta)k$$

s	貯蓄率 ($0 < s < 1$)
n	人口成長率
g	技術進歩率
δ	資本減耗率
$sf(k)$	実効投資（貯蓄のうち資本に回る分）
$(n + g + \delta)k$	損耗投資（ k を維持するのに必要な投資）

#2

定常状態の導出

ソローダイアグラム



k (効率単位当たり資本)

$k < k^* : sf(k) > (n+g+\delta)k \Rightarrow \dot{k} > 0$ (資本蓄積)

$k > k^* : sf(k) < (n+g+\delta)k \Rightarrow \dot{k} < 0$ (資本解体)

定常状態の条件と公式

定常状態 (Steady State) の定義

$$\dot{k} = 0 \iff sf(k^*) = (n + g + \delta)k^*$$

Cobb-Douglas の場合 ($f(k) = k^\alpha$) を解くと：

$$sk^{*\alpha} = (n + g + \delta)k^* \Rightarrow k^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

定常状態の一人当たり産出

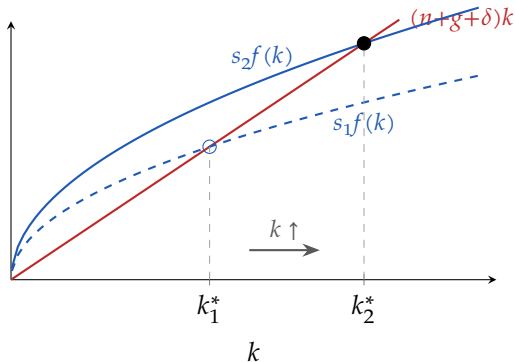
$$y^* = f(k^*) = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

公式から読み取れること

- 貯蓄率 s が高い国 $\Rightarrow k^* \cdot y^*$ が高い
- 人口成長率 n が高い国 $\Rightarrow k^* \cdot y^*$ が低い
- 技術進歩率 g が高い国 $\Rightarrow k^* \cdot y^*$ が低い
- 減価償却率 δ が高い国 $\Rightarrow k^* \cdot y^*$ が低い

比較静学①：貯蓄率の上昇

s が上昇すると定常状態はどう変わるか？

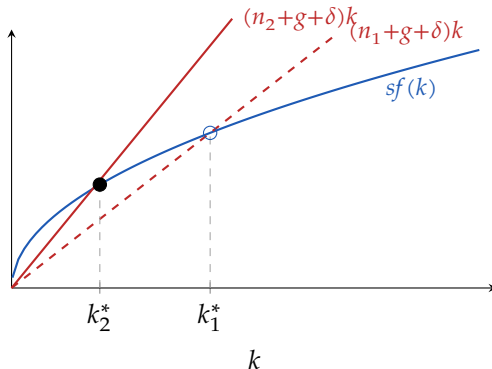


$s_1 \rightarrow s_2 > s_1 \Rightarrow sf(k)$ 曲線が上方シフト $\Rightarrow k_1^* \rightarrow k_2^* > k_1^*$

注意：定常状態での産出量は増加するが、長期成長率は g のまま！

比較静学②：人口成長率の上昇

n が上昇すると？



$n_1 \rightarrow n_2 \Rightarrow$ 赤の直線の傾きが急になる $\Rightarrow k_1^* \rightarrow k_2^* < k_1^*$

直感：人口増加で一人当たり資本 (k) を維持するための投資負担が増大

黄金律 (Golden Rule) と動学的非効率性

「一人当たり産出量を高める」ことは政策目標にならない！

定常状態での一人当たり消費（効率単位）：

$$c^* = f(k^*) - (n + g + \delta)k^* = (1 - s)f(k^*)$$

c^* を最大化する「黄金律」の資本水準 k^{**} ：

$$\frac{dc^*}{dk^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(k^{**}) = n + g + \delta}$$

黄金律：消費を最大にする貯蓄率（資本の限界生産物 = 資本の自然損耗率）

動学的非効率性 (Dynamic Inefficiency) と政策含意

- 過剰蓄積に陥った場合、蓄積した資本を切り崩して消費をした方が消費を増やせる (Abel, Mankiw, Summers and Zeckhauser 1989, REStud)
- $k^* < k^{**}$ (過少資本化)：貯蓄促進政策が厚生を改善する余地あり
- $k^* > k^{**}$ (過剰資本化・動学的非効率)：投資を減らし消費を増やすべき
- 実証的には多くの先進国は過少資本化 ($k^* < k^{**}$) の状態

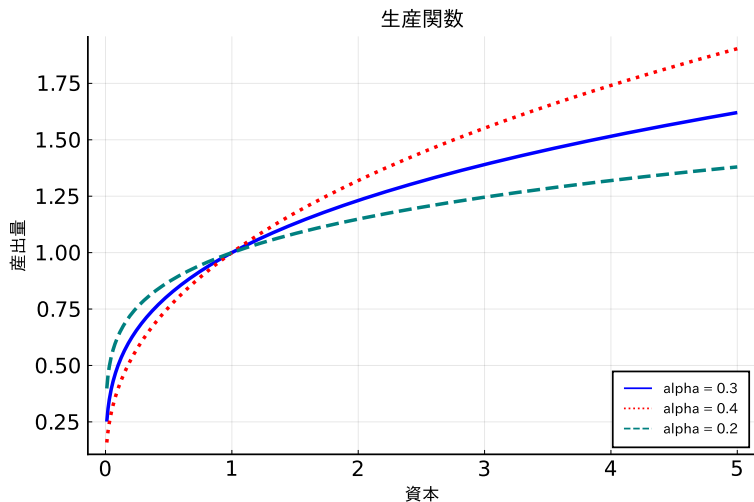
#3

数值例

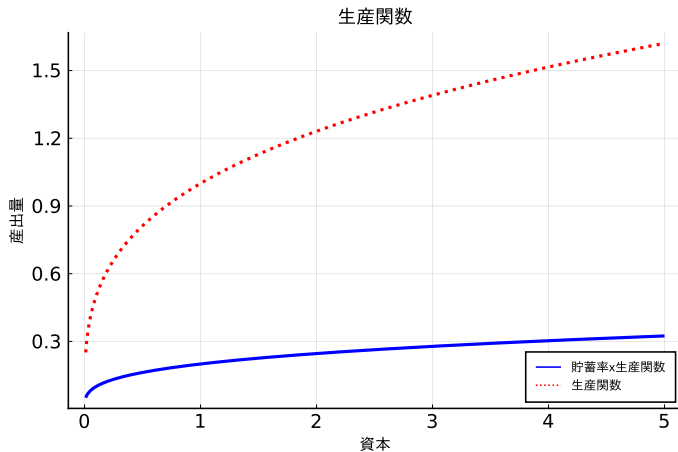
数値例

- 資本分配率 α : 0.3
- 貯蓄率 s : 0.2
- 人口成長率 n : 0.01
- 固定資本減耗率 δ : 0.08
- 技術進歩率 g : 0.02

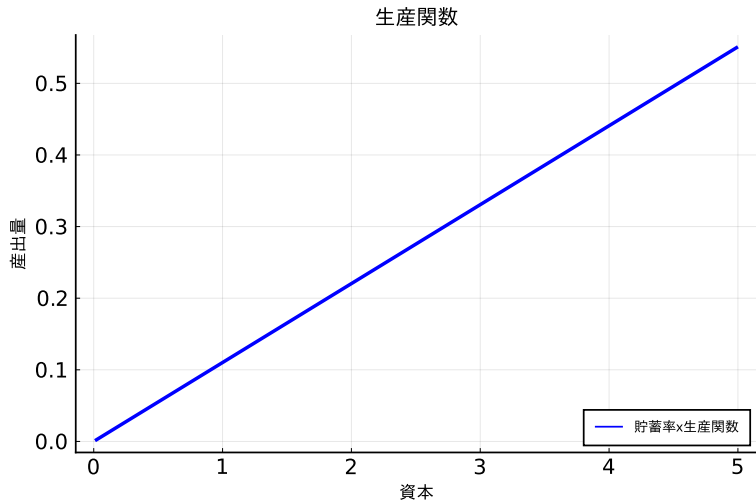
数値例：生産関数



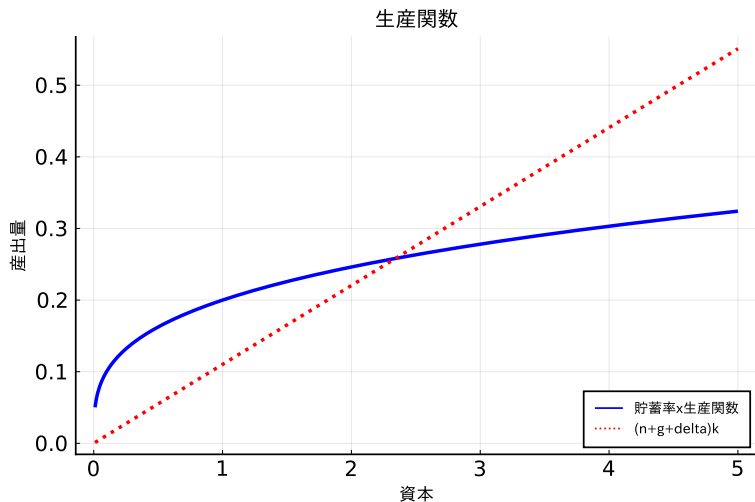
数値例：貯蓄関数



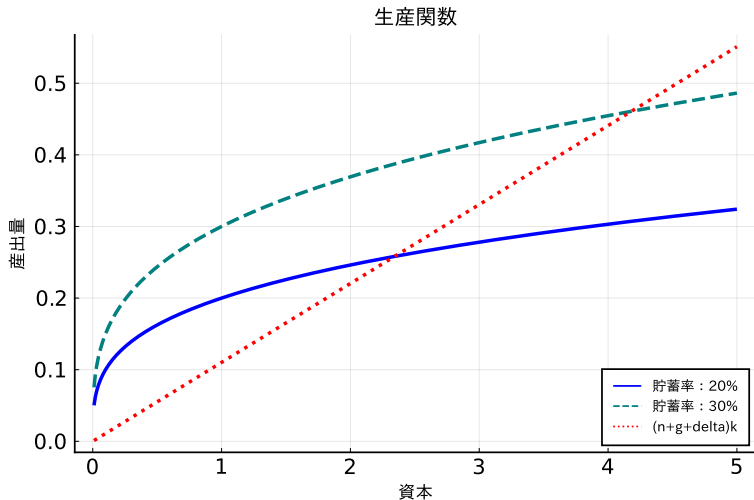
数値例： $(n + g + \delta)k$



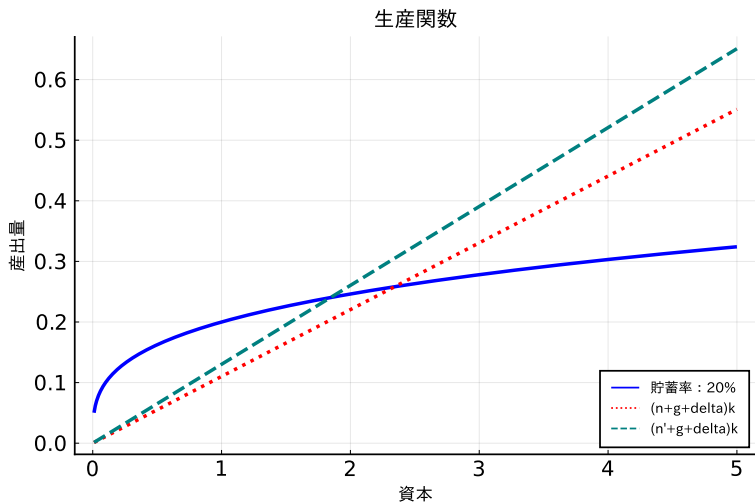
数值例：定常状态



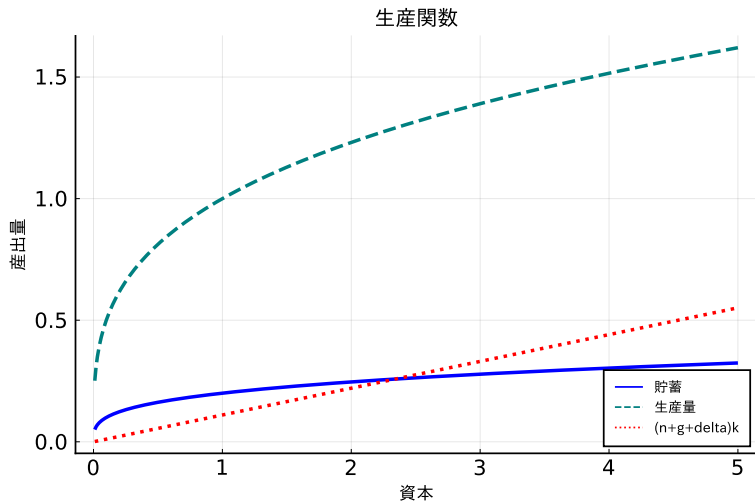
数値例：異なる貯蓄率



数値例：異なる人口成長率



数値例：黄金律



#4

移行過程と収束

定常状態への収束：移行過程をシミュレーション

定常状態への収束速度はどれほどか（やや難）

資本蓄積方程式を k^* 周辺で線形化すると：

$$\dot{k} \approx -\lambda (k - k^*), \quad \lambda = (1 - \alpha)(n + g + \delta)$$

解： $k(t) - k^* = [k(0) - k^*] e^{-\lambda t}$

収束速度の目安

$\alpha = 0.33$ 、 $n + g + \delta \approx 0.06$ のとき：

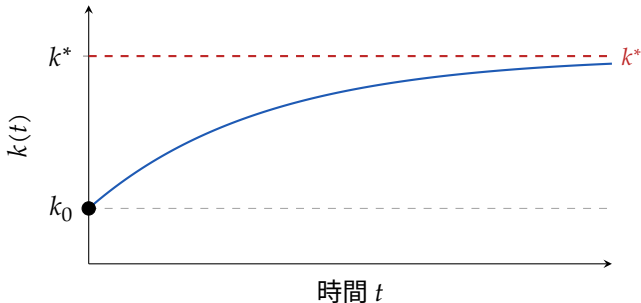
$$\lambda \approx 0.04 \quad (\text{年間 } 4\% \text{ の速度で収束})$$

半減期： $\ln 2 / \lambda \approx 17$ 年

実証：Mankiw-Romer-Weil（1992）では観察データとほぼ整合的。
ただし物的資本だけでは収束が速すぎる $\Rightarrow$ 人的資本の考慮が必要

移行過程の時間経路

k の時間的推移 (模式図)



- 初期資本 $k_0 < k^*$: k_t は単調増加しながら k^* に収束
- 収束速度は定常状態に近づくほど遅くなる (限界生産物逓減の効果)
- 成長率 $\dot{k}/k$ は k が低いほど高い $\Rightarrow$ キャッチアップ効果

絶対収束と条件収束

2つの収束仮説

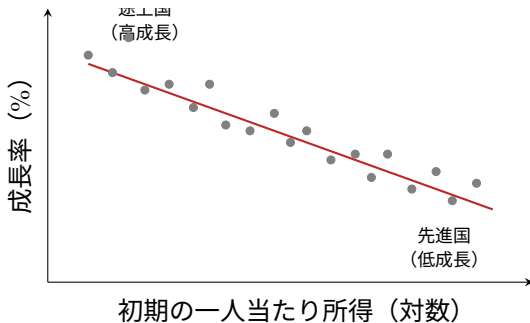
絶対収束 (Absolute Convergence)

- すべての国が同一の定常状態に向かって収束する
- 初期所得が低い国ほど成長率が高い $\Rightarrow$ 長期的に格差は縮小
- 仮定：すべての国のパラメータ (s, n, δ, g) が同一
- 現実には難しい仮定：先進国間ではある程度成立

条件収束 (Conditional Convergence)

- 各国は**自国**の定常状態に向かって収束する
- 定常状態のパラメータ (s, n) 等をコントロールした上で、初期所得と成長率の間に負の相関が生じる
- Mankiw-Romer-Weil (1992)：98 カ国データで検証 $\Rightarrow R^2 \approx 0.8$
- ソローモデルの予測と整合的

条件収束のイメージ



各国の定常状態パラメータをコントロール後、初期所得と成長率に**負の相関**
⇒ 各国が自国の定常状態に向けて収束していることの証拠

#5

経済政策との関連

ソローモデルと政策：成長戦略に使えるようなアイデア

これまでのまとめ

政策変数	変化の方向	定常状態の水準	長期成長率
貯蓄率 s	↑	○ (上昇)	× (不変)
人口成長率 n	↓	○ (上昇)	× (不変)
技術進歩率 g	↑	○ (上昇)	○ (上昇)

ポイント

- 貯蓄促進・投資支援は所得**水準**を引き上げる（水準効果）
- しかし長期の**成長率**は変えられない
- 長期成長率を変えるには g （技術進歩率）を変える必要がある
- ソローモデルでは g は外生 ⇒ 政策の及ばない領域
⇒ この限界を乗り越えようとするのが「内生的成長論」
- 人口が足を引っ張るのは意外？ ⇒ 社会保障負担の影響が入っていない

貯蓄・投資促進政策

水準効果を通じた所得向上：政策の手段

貯蓄率を高める政策の例

- **財政**：個人貯蓄優遇（NISA・iDeCo など）、財政黒字（政府貯蓄）
- **年金改革**：老後所得保障の充実 ↔ 予備的貯蓄動機との兼ね合い
- **金融市場整備**：家計が安全に貯蓄できるインフラの確立
- **日本の例**：かつては郵貯（⇒ 財政投融資）による優遇
- **海外の例**：強制貯蓄を行う国も（シンガポールなど東南アジアの一部）

投資効率を高める政策

- **規制緩和・ビジネス環境整備**：投資収益率の向上
- **法の支配・財産権保護**：投資インセンティブの確保
- **インフラ整備**：社会資本による民間投資の補完
- **対外直接投資の誘致**（外国人の貯蓄 = 投資）：外資を引きつける

貯蓄・投資促進政策（続き）

注意：過剰資本蓄積（動学的非効率性）のリスク

- 黄金律を超えた貯蓄は消費を犠牲にするだけで厚生改善にならない
- 旧ソ連型計画経済の教訓：高投資率でも非効率な配分は成長をもたらさない
- 近年の中国：投資率 50% 超？（過剰蓄積の懸念）

技術進歩を促す

TFP は成長の源泉であり、90 年代以降の停滞の原因

- TFP って何だっけ？ ⇒ ソロー残差（復習）
- 世界経済は数十年間、持続的に成長
 - 資本、労働の投入だけでは成長は止まる
 - 技術進歩なしには説明できない
 - 小さな発明から蒸気機関、電気、コンピュータまで

研究開発（Research and Development）を促進する

- 企業・国の研究開発費：R&D 補助（税額控除・補助金）
- 特許保護の期間、商標権の保護 etc.（知的財産保護）
- イノベーション
 - 創造的破壊（Creative Destruction） by Schumpeter ⇒ 例：ラッダイト運動
 - Aghion et al. “The Power of Creative Destruction,” Belknap Harvard.
- 産業政策：特定分野への重点支援（効果については賛否あり）

技術進歩を促す（続き）

- アイディア（知識資本）の重要性
 - 技術的外部性（Technological Externality）が存在
 - 先進国と発展途上国は事情が異なる
 - グローバル化とスピルオーバー
- 競争と経済成長
- 教育投資：人的資本の蓄積（→ Lucas モデルへの橋渡し）

ソローモデルが示すキャッチアップのメカニズム

- 後発国は先発国の技術を**模倣・吸収**することで急速に成長できる
- 技術フロンティアに近づくにつれ模倣コストが上昇する
⇒ 自前のイノベーション能力が必要になる（内生的成長論の世界）
- **技術移転**：FDI 誘致・貿易自由化による技術のキャッチアップ

人的資本投資：教育の経済学

- 労働投入を増やす
 - 移民 (外国人労働者) の受け入れ
 - 女性の労働参加率向上
 - 高齢者の活用
 - 少子化対策 (経済だけの問題ではないが)
 - AI? ⇒ **技術進歩は労働補完的か、代替的か?**
- 教育の役割
 - 人的資本 (Human Capital) を高める役割
 - 教育は本当に所得稼得能力を高めている?
 - 教育費の高騰と奨学金の役割
 - 発展途上国：識字率、高等教育の割合 etc.
 - On-the-Job Training(OJT)：(かつての) 日本
 - STEM 教育：Science, Technology, Engineering, Mathematics

経済成長の大前提

1. 制度の役割

- 財産権 & 知的財産権
 - 例：墾田永年私財法
- 植民地支配からの解放

2. 地理的条件

- 内陸国 vs. 沿岸国
- 熱帯地域 vs. 温帯地域：赤道からの距離
- 疫病の蔓延

3. 民主主義と経済成長

※ 制度と経済発展の詳細（因果推論による検証）は「制度の経済学と因果推論」の回で扱う。講義時間の都合上、カットする、あるいは動画配信にする可能性あり。

#6

日本経済への応用

日本の高度経済成長とソローモデル：復習

1955～1973 年：年率平均 10%成長の要因を分解する

ソロー分解（成長会計）

$$\underbrace{\frac{\Delta Y}{Y}}_{\text{GDP 成長率}} = \underbrace{\alpha \frac{\Delta K}{K}}_{\text{資本蓄積}} + \underbrace{(1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L}}_{\text{労働投入増}} + \underbrace{\frac{\Delta A}{A}}_{\text{全要素生産性 (TFP)}}$$

高度成長期の日本の特徴（ソローモデルの視点）

- **高貯蓄率**：30% 超——郵便貯金の普及・家計の節約文化
- **技術キャッチアップ**：欧米技術の大規模導入 ⇒ TFP 上昇
- **人口ボーナス**：生産年齢人口比率の上昇（ n の押し上げ効果は軽微）
- **収束の力**：戦後の低い k から定常状態への高速収束

解釈：日本は定常状態への収束過程にあった。

技術フロンティアに接近 ⇒ 成長の鈍化は「必然」

失われた 30 年：資本蓄積の限界

1990 年代以降の低成長をソローモデルで読む

定常状態の公式（再掲）

$$y^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- 日本は定常状態近傍に到達 ⇒ 収束ボーナスが消滅
- 少子高齢化（ n の低下）は一人当たり y^* を**高める**方向
- しかし g （TFP 成長率）の停滞が長期成長率を直撃
- 貯蓄率 s も高齢化で低下傾向 ⇒ y^* の水準押し下げ

政策課題（ソローモデルの視点から）

- g を引き上げるイノベーション政策・デジタル投資
- 人的資本投資（教育・リスクリング）による実効労働力の強化
- 制度改革：規制緩和、コーポレートガバナンス改革

発展途上国への示唆

なぜ貧しい国の成長は遅いのかーソローモデルの視点

定常状態 y^* が低い理由

- 低い貯蓄率 s ：消費圧力・金融市場の未発達・資本逃避
- 高い人口成長率 n ：資本希薄化 (k が蓄積しにくい)
- 低い技術水準 A ：技術移転・吸収能力の欠如
- 制度の不備：財産権・法の支配の弱さ $\Rightarrow$ 投資インセンティブ低下

政策の含意

- 貯蓄率引き上げ：金融インフラ整備・開発金融機関の活用
- 技術移転：FDI 誘致・貿易自由化・ライセンス促進
- 制度改革：腐敗防止・法整備・財産権保護
- 人口政策：女性の教育・就労機会拡大（倫理的配慮も必要）

ただし：「貯蓄さえ増やせば成長する」は単純すぎる。

制度・ガバナンスが資本蓄積の有効性を根本的に左右する (Acemoglu et al.)

#7

まとめ

ソローモデルの貢献と限界

貢献

- 長期の所得水準を貯蓄率・人口成長率・技術水準で説明する枠組み ⇒ 現在のマクロ経済学の骨組み
- 収束仮説：条件収束として実証的に広く支持 (Mankiw et al. 1992)
- 成長会計：成長要因を定量的に分析するフレームワーク
- 水準効果と成長率効果の区別 ⇒ 政策評価の基礎

限界

- 技術進歩が**外生**—政策が長期成長率を変えられない
- なぜ貯蓄率・技術進歩率が国によって異なるのかを説明していない ⇒ ミクロ経済学的基礎づけ
- 人的資本の役割が不完全 (Mankiw-Romer-Weil 拡張版で一部対処)

これらの限界を乗り越えようとするのが**内生的経済成長理論**

新古典派 vs 内生的成長論：比較のまとめ

	ソローモデル	内生的成長論
技術進歩の扱い	外生	内生
長期成長率	g (所与)	政策で変わる
収穫逓減	あり (物的資本)	排除または逓減せず
収束の予測	条件収束あり	モデルによる
政策効果	水準効果のみ	成長率効果もあり
代表的モデル	Solow (1956)	AK、Romer、Lucas

ソローモデルは現在のマクロ経済学の「基盤」

短・中期の分析や収束メカニズムの理解には依然として強力なツール
 内生的成長論はその「先」を開拓したものとして位置づけられる

#8

付録：資本蓄積式の導出

資本蓄積式の導出

- 資本ストックの推移式

$$\begin{aligned}K_{t+1} - K_t &= I_t - \delta K_t \\&= S_t - \delta K_t \\&= sY_t - \delta K_t\end{aligned}$$

- 両辺を労働供給で割ると、

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} - \frac{K_t}{L_t} = s \frac{Y_t}{L_t} - \delta \frac{K_t}{L_t}$$

資本蓄積式の導出 (続き)

- 労働供給で割った = 「1 人当たりの値」になった!
 - 労働人口は一定率 n で成長すると仮定

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1 + n$$

- 一人当たりの変数を小文字で書くことにすると、

$$\begin{aligned}\frac{K_{t+1}}{L_t} - \frac{K_t}{L_t} &= s \frac{Y_t}{L_t} - \delta \frac{K_t}{L_t}, \\ k_{t+1}(1+n) - k_t &= sy_t - \delta k_t\end{aligned}$$

資本蓄積式の導出 (続き)

- 資本蓄積式を変形

$$\begin{aligned}
 k_{t+1}(1+n) - k_t &= sk_t^\alpha - \delta k_t, \\
 k_{t+1} - k_t &= \frac{sk_t^\alpha - (\delta - 1)k_t}{(1+n)} - k_t \\
 &= \frac{sk_t^\alpha - (n + \delta)k_t}{(1+n)}
 \end{aligned}$$

資本蓄積式の導出 (続き)

- 定常状態への収束

- 貯蓄率 s 、人口成長率 n 、固定資本減耗 δ 、資本分配率 α が同じ経済は同じ資本ストック水準 (= 同じ一人当たり GDP) に収束する
- $k_{t+1} - k_t = 0 \Leftrightarrow sk_t^\alpha = (n + \delta)k_t$
- $k_{t+1} - k_t = 0$ となる状態を定常状態 (Steady State) と呼ぶ: k_{ss}

[図：ソローモデル]

- 定常状態における一人当たり資本と産出量

$$k_{ss} = \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad y_{ss} = k_{ss}^\alpha = \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

資本蓄積式の導出 (続き)

- 両辺を労働供給 × 技術水準 (有効労働) で割ると、

$$\frac{K_{t+1}}{A_t L_t} - \frac{K_t}{A_t L_t} = s \frac{Y_t}{A_t L_t} - \delta \frac{K_t}{A_t L_t}$$

- 技術水準は一定率 g で成長

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + g$$

- 資本蓄積式

$$\begin{aligned} k_{t+1}(1+n)(1+g) - k_t &= sk_t^\alpha - \delta k_t, \\ k_{t+1} - k_t &= \frac{sk_t^\alpha - (n+g+\delta+gn)k_t}{(1+n)(1+g)} \end{aligned}$$